НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ

А. Кофман Х. Хил Алуха

ВВЕДЕНИЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Настоящая монография известного французского специалиста в области исследования операций профессора Арнольда Кофмана и его испанского коллеги профессора Хайме Хила Алухи опубликована в 1986 г. и является, вероятно, первым систематизированным изложением результатов применения основных понятий и техники теории нечетких множеств к проблемам организационного управления предприятиями. Достаточно обоснованно и с присущим авторам методическим мастерством показано, что многочисленные известные математические модели управления в реальных условиях функционирования предприятий целесообразно формулировать и исследовать в предположении о нечеткости исходных данных.

Материал, изложенный в книге, можно изучать, практически не обращаясь к другим источникам, что ценно как для студентов, изучающих современные математические модели и методы в управлении предприятиями, так и для специалистов-практиков.

Для русского перевода авторы любезно предоставили некоторые дополнения, а также замеченные в оригинале опечатки и неточности. В дополнение к библиографии мы посчитали полезным привести список известных нам опубликованных на русском языке монографий и сборников научных работ по теории и применениям нечетких множеств. Отметим, что количество научных статей, публикуемых по этой теме на русском языке в настоящее время, не очень велико и составляет, по нашим оценкам, всего два-три десятка в год.

В названии книги и в ее тексте мы использовали принятое в русскоязычной литературе словосочетание «теория нечетких множеств», хотя методологически более правильно говорить о нечетких подмножествах, да и термин «нечеткие» в некоторых выражениях неудобен.

Эта монография открывает серию «Новые математические модели и методы в управлении», подготавливаемую кафедрой математического обеспечения АСУ Белорусского государственного университета. Планируется, что в эту серию войдут как переводные монографии и учебные пособия, так и новые работы, написанные специально для серии и посвященные современным моделям и методам организационного управления экономическими системами в условиях функционирования рыночной экономики. При формировании плана мы учитываем рекомендации Европейской ассоциации экономики и управления предприятиями (AEDEM, Santiago de Compostela, Spain), членами которой являемся. С благодарностью примем советы, пожелания и замечания читателей как по возможному составу серии, так и по содержанию каждой из опубликованных книг. Наш адрес: 220050, Республика Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, кафедра МО АСУ.

В. В. Краснопрошин,
Н. А. Лепешинский

ГЛАВА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

1.1. Проблемы управления предприятиями

В науке усилия многих исследователей сосредоточены на двух основных направлениях: получении объективных знаний (иначе говоря, фактов) и на так называемом идеальном сущем, которое существует лишь в сознании человека. Именно поэтому все научные знания классифицируют на точные и эмпирические науки.

Основой эмпирических наук является действительность. Внутри этих наук существует группа, которая изучает социальную действительность, социальные науки. Среди них можно выделить экономические науки, которые наряду с общими для социальных наук методами исследований используют и свои собственные подходы. Например, для экономики и управления предприятиями в первую очередь используют методы измерения, которые стремятся, следуя словам Галилео Галилея, «измерить измеримое, и попытаться сделать измеримым, что таковым не является».

Однако не все, что представляет интерес в жизни предприятий, измеримо. В действительности лишь определенные стороны явлений, фактов и отношений являются таковыми и предстоит решение нетривиальных проблем, чтобы расширить область измеримого в сфере управления предприятиями.

В деятельности предприятий существует определенный циклический процесс, который представляет собой общую материальную схему экономических действий: имеет место фаза производства, возможно накопление товаров, их перемещение и фаза потребления. Основные составляющие этого процесса — обращение товаров и их преобразование. По отношению к микроэкономике предприятие — это центр данного материального потока: оно одновременно является получателем и инициатором перемещения и местом, где осуществляется преобразование «вещей».

Итак, в широком смысле слова предприятие представляет собой центр человеческих усилий, направленных на количественное и/или качественное изменение товаров для удовлетворения потребностей, для которых они предназначены.

Предприятие как социально-экономический объект является созидательным источником: с одной стороны, это товары и услуги, из которых в конечном итоге состоит национальный продукт, и, с другой стороны, это финансы для возмещения факторов, которые участвовали в функции производства. Для управления предприятием необходимо выявить комплекс усилий, материализованных в поведении управляющего, которые направлены на достижение определенно поставленной цели. Когда рассматривается та или иная задача, то возникают соответствующие вопросы: что изучать и как изучать. Ответы на эти вопросы — первый шаг в управлении предприятиями. Таким образом, материальный объект управления производством основывается на производственной деятельности, а его формальным объектом будет «решение задач (которые возникают для достижения и поддержки равновесия в каждой из областей), количественно измеримых прямо или косвенно».

На первый взгляд может показаться,что при таком подходе к управлению устраняются происходящие на предприятии явления, которые сложно описать и которые не могут быть подвергнуты непосредственной количественной оценке. Однако более глубокое изучение вопроса позволяет сделать вывод, что и подобные явления могут быть хотя бы частично измеримы в будущем или уже косвенно измеряются.

Важно, что определение формального объекта управления предприятием отождествляется с понятием его количественной оценки, причем допускается возможность не только прямых, но и косвенных оценок или оценок в будущем.

С другой стороны, для управления необходимо использовать понятие равновесия, учитывая, что существуют различные типы: равновесие противопоставления, равновесие укрупнения и т.п. Для достижения определенного типа равновесия приходится использовать математические методы. Основной задачей является получение максимумов при определенных условиях, или более конкретно, получение максимальной производительности, максимальной рентабельности инвестиций, оптимизации наличных запасов и др. Итак, целью управления производством является достижение равновесия, а его параметры могут быть измеримыми.

1.2. Измерение производственных явлений

Для изучения проблем предприятия делаются попытки использовать методы, позволяющие добиться наилучшего понимания ежедневно возникающих явлений. Это дает возможность их формализации и последующей выработки управляющих воздействий.

Такое понимание действительности традиционно основывалось на понятии точности, и для ее количественной оценки обращались к классическим математическим схемам. Это привело к формализации «модифицированной действительности», адаптированной к математическим моделям, вместо обратного — адаптации моделей к реальным фактам. В результате точная сама по себе действительность воспринималась только через один из своих аспектов, что привело к упрощению и лишило ее точности. Конечно, это не является серьезным препятствием для того, чтобы построенная модель была в некотором смысле более совершенной, чем сама действительность.

Формализация в обычных условиях приводит к ограниченному видению предмета изучения и вынуждает исследователя уже с самого начала выбирать такие элементы для рассмотрения, чтобы в дальнейшем использовать либо точный инструментарий, либо воспринимать действительность во всей ее неточности и оперировать с «нечеткой» информацией, ориентируясь заранее на получение нечетких результатов. Иначе говоря, необходим выбор между точной моделью, которая неточно отражает действительность, и нечеткой, более соответствующей действительности.

Сознание человека воспринимает окружающие явления в упрощенном виде, поскольку любой изучаемый предмет, каким бы малым он ни был, оказывается настолько сложным, что его восприятие возможно лишь через упрощенную схему. Когда мы смотрим на какой-либо предмет, наши глаза воспринимают его приблизительно, схематично и по мере того, как используются все более мощные линзы, мы видим его все четче. Но не существует микроскопа, который мог бы показать нам его таким, «какой он есть» в действительности. Кроме того, мышление человека, так же как и его действия, являются смесью интуиции и логической точности. Однако изучение явлений, осуществляемое по упрощенным схемам, не может одновременно отражать действительность и быть полностью четким в количественной оценке. Появилась необходимость подчинить первое второму. Это привело к существованию трудно преодолимой тенденции, к использованию математики для изучения типичных явлений — человеческих знаний.

С другой стороны, развитие самой жизни с постоянным ее ускорением ведет к тому, что все изменяется с невероятной быстротой и к моменту получения модели, пригодной для определенной ситуации, возникает необходимость в ее модификации. Мы находимся в мире, где царит изменчивость и неопределенность. Поэтому при математической формализации необходимо учитывать подобные обстоятельства. Невозможно допустить, чтобы знания считались научными только в том случае, если они измерены. В таком случае общественные науки были бы лишены своего статуса.

Понятие случайности ассоциируется с идеей измерения через вероятность. Неопределенность воспринимается субъективно в связи с такими невероятностными факторами, как понятие ощущения и понятие оценки. Как одно, так и другое глубоко субъективны.

Если в происходящих событиях проявляется наложение измеримого на неизмеримое, полезным оказывается наличие формальных схем, которые помогают соединить случайность и неопределенность через понятия вероятности нечеткого подмножества, смешанных чисел, функции правдоподобия и т.п. Интерес к ним основан на том, что они способны отражать реальные явления. Это оказывается важным на практике, как по отношению к мыслимым моделям, так и к реальному управлению.

С проблемой измеримости существенно связана проблема неопределенности. При формализации поведения в целом и экономической деятельности в частности возникает необходимость вводить факторы неопределенности, предполагая, что хотя они и не измеримы, однако поддаются оценке, сравнению, градации, зависимости и т.п. Математические модели прогнозирования и операционные исследования привели за последние тридцать лет к значительному прогрессу в интерпретации действительности, что позволило получить схемы, пригодные для принятия рациональных решений. Было доказано, что интуиция играет важнейшую роль в процессе установления реалистических моделей. Кроме того, формальные схемы позволяют лучше понять действительность, когда объективное знание не считается конечной целью и модели не более реальны, чем сами факты.

Субъективные оценки являются важным шагом на пути к познанию явлений. Если какая-либо ситуация не уточнена, но утверждается, что она лучше другой, то совершается переход к более высокой ступени познания. Когда же говорят, что некоторое событие более «возможно» в будущем, открывается фундаментальная область для перспектив обоснования и выбора решения. При этом субъективное знание может подвергаться всевозможным логическим проверкам и существенным оказывается различие между нечеткостью и неточностью. Нечеткое, размытое не обязательно является неточным. Теория нечетких множеств группирует нечеткие, но точные знания. В формальной логике любой факт является ложным или истинным, но одновременно не может быть и ложным, и истинным. Не допускаются и другие градации, в то время как изучение нечеткости придает существенную важность «степени» или уровню истинности.

Мышление само по себе неточно, но, несмотря на это, мы пытаемся развить некоторые логические положения. Почти 150 лет назад, когда Дж.Буль написал книгу «Законы мышления», произошло рождение формальной логики, полезность которой доказана на практике. Но, к счастью, логика мышления не вмещается в эти пределы. Развитие математики дало толчок логике рассуждения, которая заключается в рассмотрении двух значений: да и нет, принадлежность и непринадлежность, наконец, черное и белое. Но действительность не всегда позволяет провести такие упрощения, поскольку существуют промежуточные ситуации (вся гамма серого), которые до недавнего времени оставались вне поля внимания научного рассмотрения. В отличие от компьютера сознание человека привыкло использовать неточные (размытые) понятия (как говорят, «нечеткие»). Человеку приходится рассматривать факты, которые трудно выделить, если иметь в виду только все или ничего. В конечном счете, он чувствует необходимость объединить точность и впечатления. На протяжении всей истории человечества проявляется озабоченность этим бесспорным фактом. Еще Платон и Аристотель отмечали, что мышление всегда балансирует между истинным и ложным. Впоследствии многие другие авторы ставили эту проблему. Если рассматривать самую простую область мышления в виде механизмов, которые связывают мысли и изучение которых основано на умозаключениях типа все или ничего, истина или ложь, то не удается отразить мышление ни во внешнем, ни во внутреннем плане. При этом не учитывается такая фундаментальная вещь, как мыслительная энтропия.

Ажиотаж, который был вызван информатикой, в конечном итоге показал, что недостаточно оперировать точными с математической точки зрения понятиями, поскольку они весьма неполно отражают мышление человека.

В реальной жизни встречаются объекты, определение которых вызывает затруднения. Для них могут быть получены только субъективные оценки. Имея в виду, что цель науки — это прежде всего исследование субъективных понятий, научное представление действительности во всей ее масштабности затруднено. Такая задача еще более остра для наук о человеке, в содержании которых субъективности больше, чем объективности.

В настоящее время имеется математический аппарат, который позволяет описывать эту действительность достаточно адекватно, хотя и не совсем совершенно. Вероятно, никогда не будет возможным добиться совершенства в процессе формализации реальных явлений, поскольку мозг человека с его миллиардами нейронов и их специализированных связей является огромнейшей и сложнейшей вычислительной машиной параллельного действия, которая, даже при частичном ее использовании, несравнима по возможностям с компьютером, лишенным воображения.

1.3. Теория нечетких множеств

Теория нечетких множеств является разделом математики, хорошо приспособленным для отражения субъективного и неопределенного. Это попытка описать явление таким, как оно представляется в действительности, и приблизиться к его рассмотрению без искажений, обусловленных стремлением к точности и четкости. Новый подход к описанию неопределенности через понятие нечеткости дает возможность соединить строгость последовательных рассуждений с богатством воображения, присущим нечеткости, соединяя последовательные возможности машины с возможностями мозга человека. Этот математический аппарат не более сложен, чем обычно используемый. Он оказывается более простым и близким к обычной манере рассуждения человека.

Теория нечетких множеств — это попытка, достигнутая пока частично, научно реабилитировать субъективизм и неточность. Использование нечетких схем возможно практически во всех сферах научных исследований: в управлении производством, в биологии, медицине, геологии, социологии, в фонетике и даже в музыке. Любая проблема с неопределенностями может рассматриваться с помощью теории нечетких множеств и с течением времени это приводит к все более действенному внесению в формальные схемы таких механизмов мышления, как ощущения и количественные оценки. Например, использование понятия «нечеткая метаимпликация» из теории нечетких множеств играет важную роль при формализации процесса принятии решений в медицинской диагностике.

Уже в течение более 50 лет большое число математиков интересуется многозначной логикой. Среди них можно упомянуть Рассела, Лукашевича, Поста и других. С 1965 года, когда Лофти А.Заде опубликовал свою первую статью о «нечетких множествах», должно было пройти 10 лет для того, чтобы эти идеи нашли распространение. До 1975 года было опубликовано только 2 книги на эту тему. Сегодня более десяти тысяч исследователей занимаются изучением и разработкой этой теории. Среди них Беллман, Готвальд, Кендел, Негойта, Нгуен, Сугено, Заде, Цанг, Циммерман, а также авторы данной работы.

В настоящее время уже невозможно говорить только об одной логике, поскольку новые логические системы легко конструируются. Для этого достаточно установить аксиомы, чтобы, исходя из них, правильно, без противоречий соединять высказывания. Таким образом, сегодня «нечеткая логика» воспринимается так же, как в свое время воспринималась булева логика. Например, если в реализации отношений человек-компьютер необходимо прибегнуть к последовательной логике, то в отношениях между людьми более адекватной оказывается теория нечетких множеств. Традиционная теория множеств и булева алгебра (с ее логикой принадлежности или непринадлежности) позволили формализовать определенные ситуации, которые ставит действительность. Существуют однако и другие ситуации, которые трудно смоделировать по таким схемам. В повседневной деятельности имеется множество примеров, на которых это можно проверить. Если рассмотреть множество всех людей и попробовать выделить в нем подмножество «молодых людей», возникает серьезная проблема, поскольку границы такого подмножества не достаточно определенны. Или, если с далекого холма виден пляж с множеством отдыхающих, то, попытавшись,можно определить подмножество лиц, находящихся в воде, выделить тех, кто действительно находится там, и тех, которые «с уверенностью» находятся на песке. Но найдутся и такие лица, для которых нужно будет установить «степень или уровень принадлежности».

Таким образом, приходится оперировать недостаточно четко определенными понятиями, которые могут быть упорядочены.

Очевидно, что нечеткие множества имеют разную степень нечеткости, поэтому можно говорить о множествах «почти четких», «слегка четких», «очень четких». Любопытно, что в определенной степени нечеткость также представляет собой нечеткое понятие.

Отношения между человеком и окружающим его миром не могут быть описаны только с помощью понятия множества в его традиционном употреблении. Нужно прибегнуть к нечетким множествам, позволяющим выражать понятия с нечеткими границами, в которых принадлежность к определенному «классу» позволяет достичь определенной градации. Теория нечетких множеств по словам Заде является шагом к сближению между точностью классической математики и зыбкой неточностью действительности.

1.4. Нечеткость при описании предприятия

Экономическая, социальная и технологическая обстановка на предприятиях в настоящее время является значительно менее предсказуемой и находится в значительно более нестабильной ситуации, чем в недалеком прошлом. Поэтому, как на уровне экономики, так и микроэкономики ведутся поиски новых подходов для изучения ситуаций, которые переживают экономические системы и предприятия. За последние годы экономические исследования по изучению хозяйства стран в целом и проблем предприятий в частности развиваются ускоренными темпами.

С распространением использования компьютеров достигнут значительный прогресс в обработке данных, которые необходимы для предприятий, и это позволило улучшить управление ими. Однако более глубокое изучение проблем управления требует привлечения новых видов информации, так как экономическая обстановка становится все более неопределенной.

Математики и экономисты были вынуждены исследовать эту тенденцию, и им удалось получить новые схемы, позволяющие более полно рассматривать действительность, избегая по возможности традиционных деформаций, которые возникают при использовании точных числовых данных и приводят к тому, что формальные схемы не соответствуют реальным фактам.

В связи с деятельностью предприятий возникают задачи, требующие принятия решений в условиях, где нечетко проявляются цели и ограничения, и даже последствия каждой из избираемых альтернатив. Для количественной оценки этой неопределенности традиционно использовались методы теории вероятностей, а именно теория решений, и при этом неопределенные факты отождествлялись со случайными. При новом подходе совершается переход от случайности к нечеткости и неопределенность формализуется посредством ситуаций, в которых существует градация между абсолютной принадлежностью и непринадлежностью.

В то время, как концепция вероятности связана со случайностью, так называемая характеристическая функция принадлежности ассоциируется с нечеткостью. Определенное внешнее сходство между вероятностями и значениями функции принадлежности существует хотя бы потому, что они расположены между нулем и единицей. Однако, по существу, оба понятия обладают различными свойствами.

Понятия случайности и неопределенности имеют тенденцию смешиваться в разговорном языке, но в языке науки уже давно произошло разграничение их значений. С появлением теории нечетких множеств достигнута большая ясность, поскольку строго описано то, что не может быть оценено с помощью вероятности. Несомненно, что «неопределенные числа» не подчиняются тем же арифметическим правилам, что и «случайные переменные» и понятие «вероятностная энтропия» не должно смешиваться с понятием «неупорядоченность в области неопределенности».

Очень часто можно услышать о деятельности предприятия: «В этом месяце сбыт достиг удовлетворительного уровня».Привлекая теорию нечетких множеств, можно было бы сказать, что этот месяц входит в нечеткое множество «месяцы удовлетворительного сбыта» с «определенной» степенью достоверности, равной какому-то значению (например, 0,9) между 0 и 1. Другой смысл будет иметь фраза, что вероятность удовлетворительного сбыта в этом месяце будет равна 0,9. В этом случае подразумевается «ясность», связанная со случайным фактом принадлежности этого месяца к четкому подмножеству месяцев удовлетворительного сбыта.

При изучении экономических проблем предприятий обычно используется математическая терминология с ее абстрактными элементами. Вообще используется все то, что приближает к основной цели: как можно точнее описать действительность, даже зная, что некоторые составляющие полностью неизвестны. Однако необходимо придерживаться здравого смысла, и даже когда мечта о формальной теории кажется реальной, наступает момент, требующий перехода к конкретным воздействиям на экономические системы предприятия. Именно поэтому знания должны иметь прикладной характер.

Те же вопросы вновь возникают в связи с интенсивным использованием компьютеров в управлении предприятием. Действительно, если проанализировать лучшие из программ, то можно заметить, что делалась попытка схематично воспроизвести все то, что происходит в области экономики предприятий. В то же время отмечалось наличие большого количества фактов, которые невозможно было формализовать. Поскольку управление предприятиями входит в область наук о человеке, оно должно отражать какую-то непредсказуемость в жизни предприятия. Эта непредсказуемость, связанная с самой жизнью человека, не должна устраняться во имя удобства, предоставляемого использованием автоматов. Напротив, оказывается целесообразным рассмотрение сложной реальности для ее лучшего понимания. Нет ничего худшего в экономике, чем застывшие схемы. Математика нечеткости позволяет добиться той исключительной гибкости, которой так не хватает при моделировании областей уверенности и риска.

Научные работы, в которых говорится о проблемах, связанных с управлением предприятиями, содержат большое разнообразие математических моделей, требующих абсолютной точности данных. Однако доказано, что это требование точности приводит к тому, что схемы значительно удаляются от реальности, характеризуемой многочисленными неточностями. Сложность проблемы и неопределенность стиуаций сделали необходимым введение более гибких и адекватных реальности схем. Теория нечетких множеств обусловила появление методов, облегчающих решение задач, в которых превалирует неопределенность.

Принятие решений в предпринимательской деятельности оказывается более сложным вследствие технического прогресса, разнообразия рынков и большой номенклатуры товаров. Это привело к тому, что интуиция предпринимателя должна быть дополнена более сложными научными схемами.

Возможности, предоставляемые нечеткими множествами для рассмотрения проблем принятия решений в области деятельности предприятий, весьма широки, и без сомнения они обогатят методы управления предприятиями, начиная с долгосрочного и краткосрочного планирования, направления инвестиций, управления запасами, замены оборудования, исследования новой продукции, многокритериальных решений, отбора персонала, кружков качества и кончая планированием со смешанными данными и многим другим. Однако надежды на эти модели не должны приводить к игнорированию очевидного факта: традиционные методы не должны быть забыты, поскольку они очень полезны в том случае, когда явление измеримо. Но когда появляются факторы, которые еще не поддаются измерению, следует использовать оценку, достижимую с помощью нечетких критериев.

Мы живем во времена, когда требуется реалистический подход к управлению предприятиями. Хотя, на наш взгляд, еще нельзя обойтись без интуиции предпринимателя, сложность той среды, в которой мы живем, требует разработки новых методов, с помощью которых можно было бы продвинуться на пути к прогрессу.

С помощью этих методов становится возможным формальное описание предпринимательских отношений, при этом возрастает связь между эволюцией реальных процессов и схемами, выработанными для их описания. Поэтому они могут оказать важную помощь предпринимателю для принятия решений в обстановке неопределенности.

С возникновением теории нечетких множеств схемы, традиционно использовавшиеся предпринимателем для принятия решений, могут быть дополнены новыми методами, которые без сомнения окажутся плодотворными в решении сложных проблем экономической деятельности.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

2.1. Основы теории нечетких множеств

Теория множеств надежно закрепилась в научном мировоззрении, и основанная на ней современная математика изучается и используется во всем мире.

Понятие «множество» определяется достаточно просто: «речь идет о группе различных объектов, обладающих некоторым общим свойством». Набор деталей, нужных для сборки автомобиля, персонал предприятия, список целых чисел, точки прямой и т.п. могут быть представлены как множества. Любая совокупность элементов множества составляет его подмножество. Иногда для удобства исходное множество можно рассматривать как подмножество самого себя. Для каждого элемента множества нетрудно определить его принадлежность к заданному подмножеству. Исходное множество часто называют универсальным. Если оно представлено как

(2.1) $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,

то можно, например, записать

(2.2) $A = \{b, c, e, g\}$,

и этим самым задать A как подмножество E. При этом b, c, e, g принадлежат, a, d, f не принадлежат подмножеству A.

В области управления предприятием существует много ситуаций, в которых используется понятие подмножества. Пусть, например, необходимо провести мероприятия по обновлению персонала для омоложения его состава. Возраст всех работающих от 18 до 70 лет. Работники, возраст которых попадает в пределы от 18 до 35 лет, составляют подмножество «молодые рабочие». Подмножество «старые рабочие», образуется в соответствии с возрастом от 60 до 70 лет.

Для указания принадлежности различных элементов к определенному подмножеству удобно использовать какой-либо символ. Можно, например, обозначить принадлежность через 1 и непринадлежность через 0. Таким образом, (2.1) и (2.2) запишутся в виде

(2.3) E =

a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	1	1	1

,

(2.4) A =

a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	0	1	0	1

.

Представление, основанное на перечислении элементов, непригодно для задания универсальных множеств (например, для всех точек прямой). В этом случае его удобнее изображать в виде графика, на котором по оси ординат выделены значения 0 и 1 (непринадлежности и принадлежности), а на оси абсцисс — необходимые участки прямой. Тогда приведенный выше пример можно представить * на рис 2.1 и 2.2.

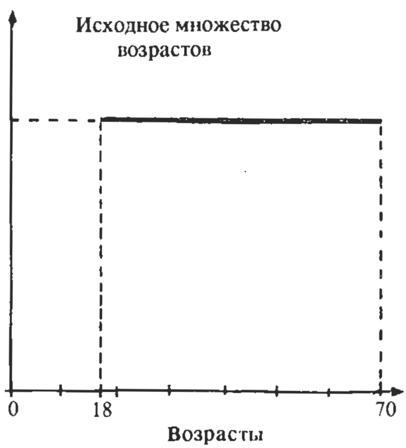


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Описанные выше способы однозначно определяют факт принадлежности или непринадлежности различных элементов к конкретному подмножеству. Речь идет либо об одном, либо о другом. В действительности в

---

* С определенной оговоркой, связанной с конечностью множества работников. *(Прим.ред.перевода)*

некоторых случаях оказывается необходимым вводить некоторые оттенки. Если рассматривать свойство «оптимальный возраст работника», можно утверждать, что по достижении 60 лет трудовая активность идет на спад. Можно сомневаться, применимо ли это к 55-летним работникам, трудно допустить для 50-летних, и это свойство не вызывает споров относительно лиц моложе 35 лет. Можно изобразить подмножество «оптимальный возраст работающего» на рис. 2.3.

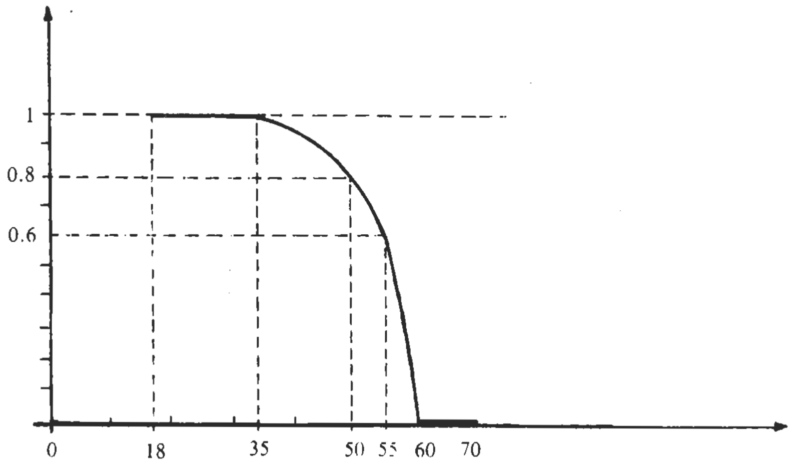


Рис. 2.3

Таким образом, 18-летний будет принадлежать к подмножеству «оптимальный возраст работающего» при уровне 1 так же, как и 35-летний. Принадлежность 50-летнего к этому подмножеству оценивается уровнем 0.8, 55-летнего — 0.6 и старше 60 лет — уровнем 0. Подмножество «оптимальный возраст работающего» оказывается «размытым» или «нечетким». Любой из этих терминов может быть использован * на равных правах.

Если задано универсальное множество E из (2.3), то его подмножеством может быть

---

* В русскоязычной научной литературе более употребителен термин «нечеткое». *(Прим.ред.перевода.)*

	a	b	c	d	e	f	g
(2.5) $\underset{\sim}{B}$ =	0.2	0.7	1	0.4	0	0.3	0.9

Нечеткость подмножества отмечена тильдой под буквой. Десятичные числа между 0 и 1 можно было бы заменить другими значениями при условии, что они смогут представлять различные уровни принадлежности. Таким образом, как в обычных, так и в нечетких подмножествах всем элементам свойственна так называемая характеристическая функция принадлежности $\mu_p(x)$, где p — обозначение обычного или нечеткого подмножества. Эта функция принимает либо значение 1, либо 0 (в зависимости от принадлежности или непринадлежности к подмножеству A), либо любое значение из интервала [0, 1].

Итак, можно утверждать, что существуют определенные факты или явления, которые плохо согласуются с логикой принадлежности или непринадлежности, особенно когда этот механизм сравнивается с процессом мышления. В этом случае трудно предположить, что объекты строго разграничены между «да» и «нет». Иногда говорят, что товар дорогой или дешевый. Однако все возможности этим не исчерпываются, поскольку товар может быть «несколько дороговатым», или «очень дорогим», «довольно дорогим» и т.д. Степень «дорогой» в формальной логике содержит другую степень, а именно «не дешевый». Однако отсутствие оттенков приводит к тому, что этой схемы оказывается недостаточно в реальной жизни.

Когда речь идет о найме персонала для предприятия, и находится человек, подходящий по своим возможностям для осуществления определенной деятельности, трудно предположить, что удастся найти человека, который обладал бы в абсолютной степени требуемыми качествами. Он может «немного недотягивать» или «немного превосходить» определенные качества, которые признаны идеальными.

В нашей системе взаимосвязей не все функционирует на основе «всего» или «ничего», необходима более широкая градация оценок. Это обуславливает полезность теории нечетких множеств. Важно подчеркнуть, что речь идет о нечетких подмножествах вполне «четкого» универсального множества. Имеется определенное расхождение с англоязычной терминологией, в которой обычно употребляется термин «fuzzy set» вместо «fuzzy subset» *.

Нельзя сказать, что основы теории нечетких множеств возникли недавно, поскольку существуют прецеденты более ранних исследований, рассматривающих аналогичные объекты. Когда Заде анализировал факт, что

---

* В русскоязычной научной литературе также более употребителен термин «нечеткие множества». Поэтому в заглавии настоящей книги и в тексте чаще всего используется именно этот вариант. *(Прим.ред.перевода.)*

функция принадлежности к обычному подмножеству должна принимать значения 0 или 1, он подумал: почему вместо двух крайних значений нельзя взять любые из интервала [0, 1]? Таким образом, оттенки принадлежности были введены посредством правильных десятичных дробей. Так, в предыдущем примере «a» включено в E с уровнем 0.2, «b» — с уровнем 0.7, «c» — с уровнем 1, «d» — с уровнем 0.7, «e» — с уровнем 0, «f» — с уровнем 0.3, «g» — с уровнем 0.9. Перед предприятием, которое ищет работника, возникает проблема оттенков. Действительно, когда сравнивают качества определенного человека с идеальным образом, нельзя получить абсолютно пригодный или непригодный по всем параметрам результат. Требуется определить «степень» пригодности, «степень» профессиональной компетентности, «степень» совместимости с другими работающими на предприятии и т.д., давая при этом количественную оценку каждого качества. В конечном счете оказывается возможным определить степень пригодности через нечеткие множества, оценивая отклонение «расстояния» между идеальным образом и изучаемым человеком.

Так возникает важное понятие энтропии или «оценки неупорядоченности». * В формальной логике, в компьютерных командах понятие неупорядоченности не возникает, поскольку там величины интерпретируются однозначно. В этом случае имеем нулевую энтропию.

Энтропия не рассматривается также в классической теории множеств. Однако это понятие становится основным в математике нечеткости: появляется возможность осуществить определенную оценку энтропии нечеткого подмножества. Существует несколько вариантов оценки энтропии, зависящих от способа оценки расстояния между двумя нечеткими подмножествами. Если взять, например, подмножество (2.5) и построить обычное подмножество B, такое, что при любом значении элемента B, превышающем 0.5, ему соответствует в B элемент 1, а для любого значения, равного или меньшего 0.5, — элемент 0, то получим

$$(2.6) \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.7 & 1 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0.9 \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$$(2.7) \qquad \underset{\approx}{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

---

* Энтропия — основное понятие в теории передачи информации. *(Прим. ред. перевода)*

Если рассчитать сумму отклонений в абсолютных значениях между $\underset{\sim}{B}$ и $\underset{=}{B}$, получаем

$$d(\underset{\sim}{B},\underset{=}{B})=|0.2-0|+|0.7-1|+|1-1|+|0.4-0|+|0-0|+|0.3-0|+$$

$$+|0.9-1|=0.2+0.3+0+0.4+0+0.3+0.1=1.3. \tag{2.8}$$

Если разделить этот результат на число 7 (количество элементов исходного множества), то получим

$$\delta(\underset{\sim}{B},\underset{=}{B})=\frac{1.3}{7}=0.185. \tag{2.9}$$

Деление на количество элементов проведено с целью получения числа, расположенного между 0 и 1. Число 0.185 в научном смысле — это значение энтропии или неупорядоченности подмножества $\underset{\sim}{B}$. Можно заметить, что относительная энтропия, определяемая числом, расположенным между 0 и 1, зависит от определения универсального множества. В связи с этим изучаются различные теоретические проблемы, когда множество бесконечно.

Приведенный выше пример отбора персонала является показательным. Однако на практике вследствие незнания возможностей теории нечетких множеств пока что используются другие менее приемлемые формальные теории. Неоспоримым преимуществом было бы использование вопросников, содержащих категорию оттенков, поскольку возможные кандидаты могли бы более адекватно выразить как свои знания, так и способ своего мышления. Человеку может нравиться его профессия в абсолютной степени, однако это нетипично. Обычно существует градация: очень мало, достаточно. Люди — не автоматы, и их описание не может вестись так, как будто они ими являются. В конечном счете, самым важным является умение переводить оттенки в математические символы для того, чтобы посредством их можно было получить выводы, учитывающие эти оттенки. Это как раз и позволяет делать теория нечетких множеств.

2.2. Элементарные операции над нечеткими подмножествами

Над подмножествами можно осуществлять различные операции, соответствующие обычным составляющим речи: и, и/или, или, не. Если задано универсальное множество (2.3) и два его подмножества:

(2.10) $A_1=$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	1	0	1	1

,

	a	b	c	d	e	f	g
(2.11) $A_2=$	1	0	1	1	0	0	1

то можно определить такое подмножество A_3, что всякий элемент, принадлежащий A_3, должен принадлежать одновременно A_1 и A_2. В примере а принадлежит A_1 и A_2, поэтому а принадлежит также A_3; b не принадлежит ни A_1, ни A_2, поэтому b не принадлежит A_3. В итоге получим

	a	b	c	d	e	f	g
(2.12) $A_3=$	1	0	0	1	0	0	1

Можно записать эту операцию, называемую «пересечением», в виде

(2.13) $A_3 = A_1 \cap A_2$.

Пересечение $\cap$ задает подмножество элементов, имеющих одновременно свойства A_1 и A_2.

Другой классической операцией над подмножествами является «объединение», соответствующее оператору и/или, т.е. один, другой, или оба. Если объединить подмножества (2.10) и (2.11), получим такое подмножество A_4, что всякий элемент, принадлежащий A_4, должен принадлежать или A_1, или A_2, или обоим вместе. Видно, что а принадлежит A_1 и A_2, поэтому а принадлежит A_4; b не принадлежит ни A_1, ни A_2, поэтому b не принадлежит A_4, и так далее. В итоге получим

	a	b	c	d	e	f	g
(2.14) $A_4=$	1	0	1	1	0	1	1

Такая операция обозначается $\cup$. Таким образом,

(2.15) $A_4 = A_1 \cup A_2$.

Объединение $\cup$ образует подмножество элементов, имеющих свойства A_1 или A_2, а также A_1 и A_2. Нельзя смешивать с объединением операцию «дизъюнктивная сумма», соответствующую «разделительному или», т.е. одному, другому, но не обоим. Эта операция для (2.10) и (2.11) дает

	a	b	c	d	e	f	g
(2.16) $A_5=$	0	0	1	0	0	1	0

Иногда в естественной речи смешивают операции «или» и «и/или», и это при переводе на математический язык может привести к неправильным результатам. Операция, осуществляемая для получения A_5, обозначается символом $\oplus$.Тогда

(2.17) $A_5 = A_1 \oplus A_2$.

Отрицание вводится операцией «дополнения». Так, A_6 как дополнение для A_1 будет получено следующим образом: a принадлежит A_1, тогда a не принадлежит A_6; так как b не принадлежит A_1, то b принадлежит A_6; c не принадлежит A_1, значит, c принадлежит A_6 и т.д.:

(2.18) $A_6=$

a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	0	1	0	0

.

Операция «дополнение» обозначается черточкой над символом, соответствующим дополняемому подмножеству:

(2.19) $A_6 = \overline{A}_1$.

Подмножество A_6 обладает свойствами, которыми не обладает A_1 , и A_6 не обладает свойствами, которыми обладает A_1.

Таким образом, рассмотрение обычных подмножеств позволяет осуществить их объединение, пересечение, дополнение и все возможные комбинации этих операций. Однако, как уже отмечалось, в проблемах управления имеют место отклонения от логики «принадлежности — непринадлежности». Действительно, посредством обычных подмножеств можно выразить, что товар является дорогим или дешевым, однако термин «дорогой» не дает абсолютно точного описания. Можно найти товар, который при цене 50 будет дорогим, а другой при цене 500 таковым не будет. Как можно проанализировать, является ли товар дорогим или дешевым? Возможно ли, чтобы он был и тем, и другим одновременно? Все такие оттенки различаются в теории нечетких множеств. Пересечение между «дорогим» и «дешевым» в этой теории — это не пустое множество, как это имеет место в обычных подмножествах. Можно отметить также, что в обычной речи понятие «недешево» не полностью соответствует понятию «дорого», «недорого» не равно «дешево». Все эти оттенки можно отразить в теории нечетких множеств с помощью введения уровней принадлежности и операций над ними.

Эти операции во многом аналогичны операциям над обычными множествами.

Действительно, возьмем универсальное множество (2.3) и рассмотрим его нечеткие подмножества $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$:

(2.20) $\underset{\sim}{B}_1=$

a	b	c	d	e	f	g
0.3	1	0.2	0	0.9	0.5	0.7

,

(2.21) $\underset{\sim}{B}_2=$

a	b	c	d	e	f	g
0.4	0.1	0	1	0.8	0.6	0.7

.

Пересечение $\cap$ этих двух подмножеств определяется следующим образом: элемент a принадлежит $\underset{\sim}{B}_1$ с уровнем 0.3 и $\underset{\sim}{B}_2$ с уровнем 0.4, тогда для $\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$ принимается, что a имеет более низкий уровень, т.е. 0.3. Обоснование простое: при уровне 0.3 и более низком a принадлежит $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$, при более высоких уровнях (до 0.4) принадлежит только $\underset{\sim}{B}_2$, а при еще более высоких уровнях никакому из них. Для b нужно взять 0.1, для c — 0, для d — 0, для e — 0.8 и т.д. Таким образом, получим

$\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.3	0.1	0	0	0.8	0.5	0.7

.

Обобщая, можно сказать: при заданном универсальном множестве E пересечение $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ представляет нечеткое подмножество, каждому элементу которого поставлено в соответствие наименьшее значение характеристических функций принадлежности нечетких подмножеств $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$. Другими словами,

$$\forall x \in E: \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2}(x) = \operatorname{Min}\,(\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_2}(x)) \ .$$

Если нечеткие подмножества $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ представить в виде

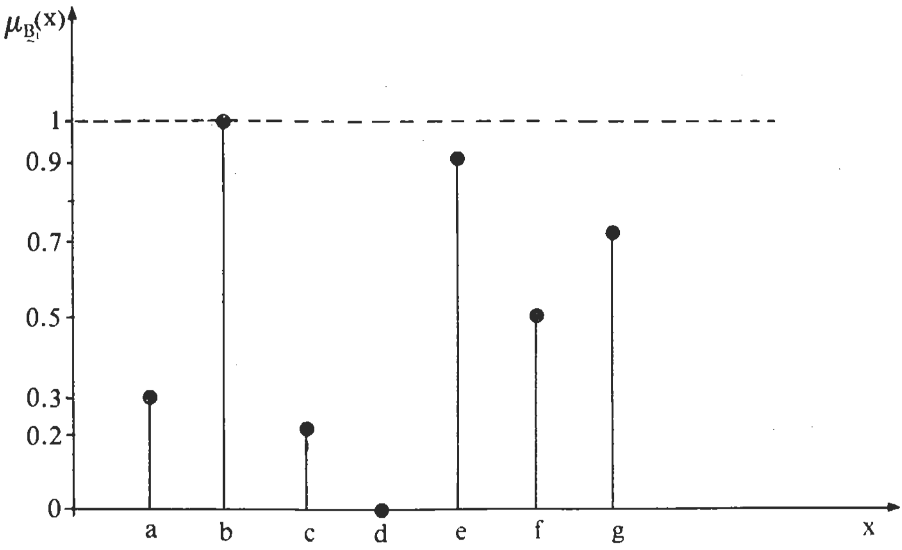
$\underset{\sim}{B}_1 = \{ (a, 0.3), (b, 1), (c, 0.2), (d, 0), (e, 0.9), (f, 0.5), (g, 0.7) \}$,

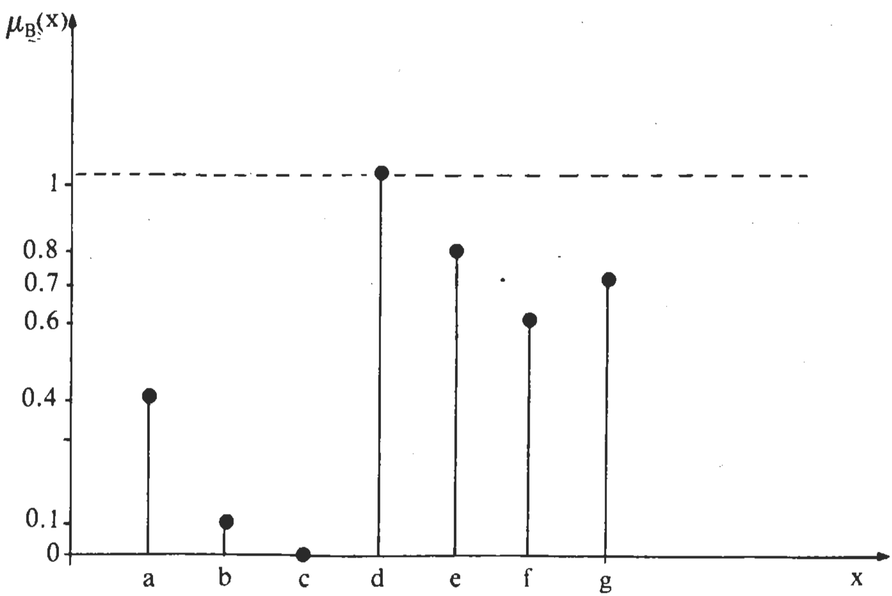
$\underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.4), (b, 0.1), (c, 0), (d, 1), (e, 0.8), (f, 0.6), (g, 0.7) \}$,

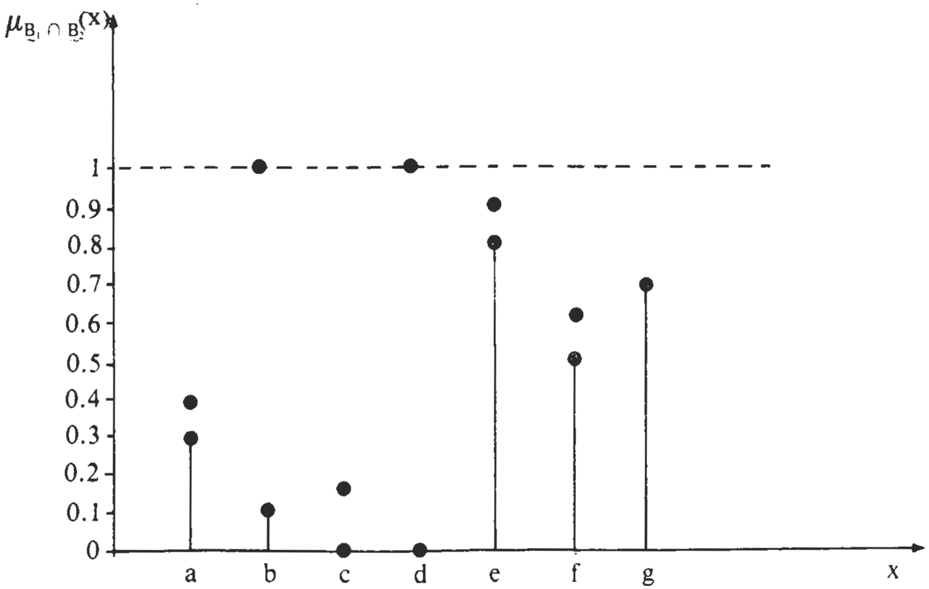
то их пересечение представляет подмножество

$\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0), (d, 0), (e, 0.8), (f, 0.5), (g, 0.7) \}$.

Графически это можно представить так:







Объединение $\cup$ нечетких подмножеств $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ осуществляется выбором для каждого элемента наибольшего уровня принадлежности из каждого подмножества. Так, для a это будет 0.4, для b — 1 и т.д. и в итоге получим

(2.22) $\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.4	1	0.2	1	0.9	0.6	0.7

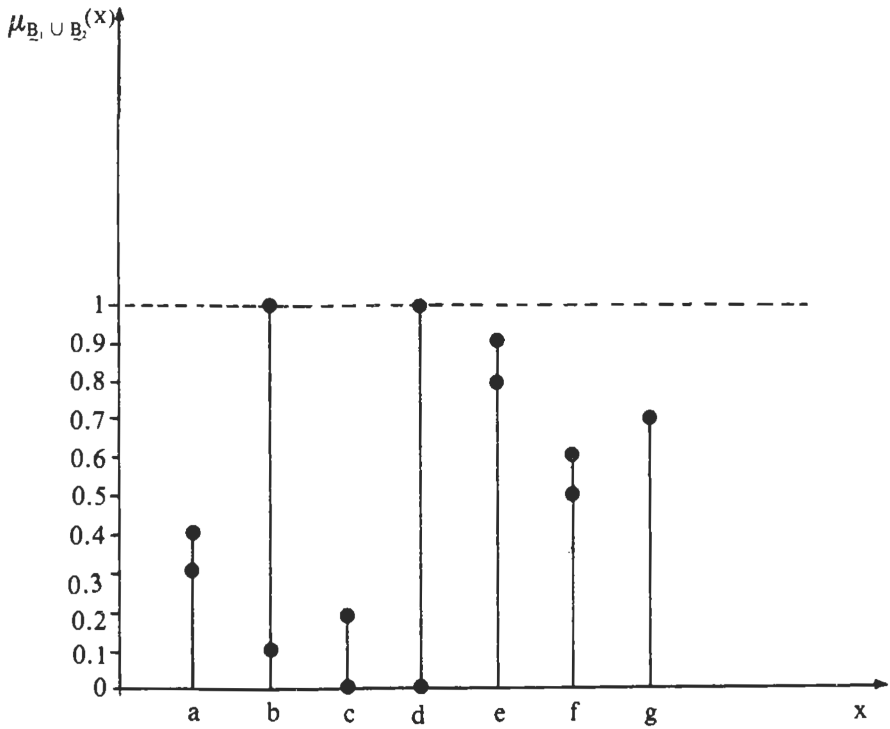
.

Обобщая, можно сказать, что при заданном универсальном множестве E объединение $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ представляет нечеткое подмножество, каждому элементу которого поставлено в соответствие наибольшее значение характеристических функций принадлежности нечетких подмножеств $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$. Другими словами

(2.23) $\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2}(x) = \mathrm{Max}\,(\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_2}(x))$.

В другой форме записи имеем

$\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.4), (b, 1), (c, 0.2), (d, 1), (e, 0.9), (f, 0.6), (g, 0.7) \}$, что графически изображается так :



Для нахождения дополнения нечеткого подмножества для каждого элемента достаточно вычислить дополнение значения характеристической функции до единицы. Так, дополнениями $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ будут соответственно

(2.24)

$\overline{\underset{\sim}{B}}_1 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.7	0	0.8	1	0.1	0.5	0.3

,

$\overline{\underset{\sim}{B}}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.6	0.9	1	0	0.2	0.4	0.3

.

Обобщенно можно записать, что

$$\forall\, x \in E\, : \quad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad .$$

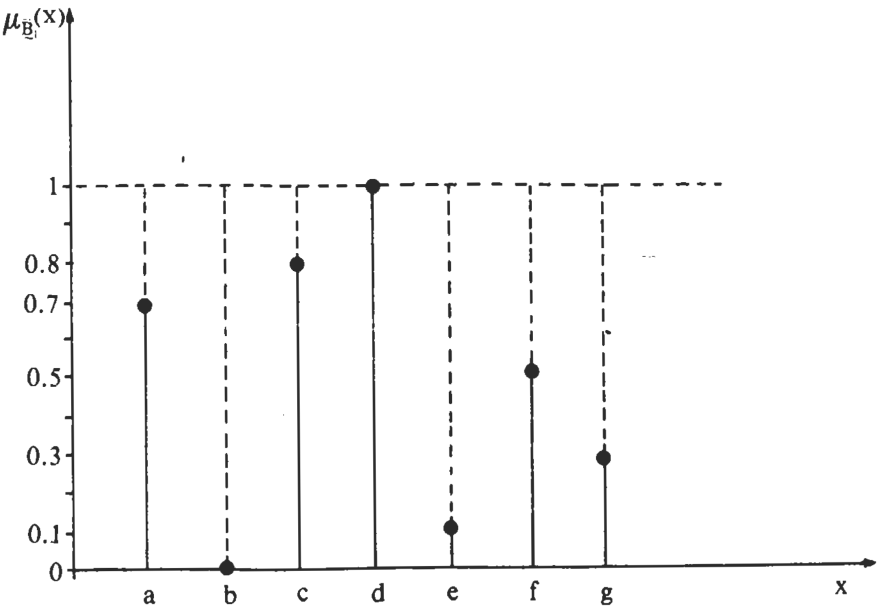
В другой форме записи

$\overline{\underset{\sim}{B}}_1 = \{ (a, 0.7), (b, 0), (c, 0.8), (d, 1), (e, 0.1), (f, 0.5), (g, 0.3) \}.$

Очевидно, что

$$\overline{\overline{\underset{\sim}{B}}}_1 = \underset{\sim}{B}_1.$$

Графически это можно представить в виде



Дизъюнктивная сумма нечетких подмножеств определяется на основе операций объединения, пересечения и дополнения следующим образом:

$\underset{\sim}{B}_1 \cap \overline{\underset{\sim}{B}}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.3	0.9	0.2	0	0.2	0.4	0.3

,

$\overline{\underset{\sim}{B}}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.4	0	0	1	0.1	0.5	0.3

,

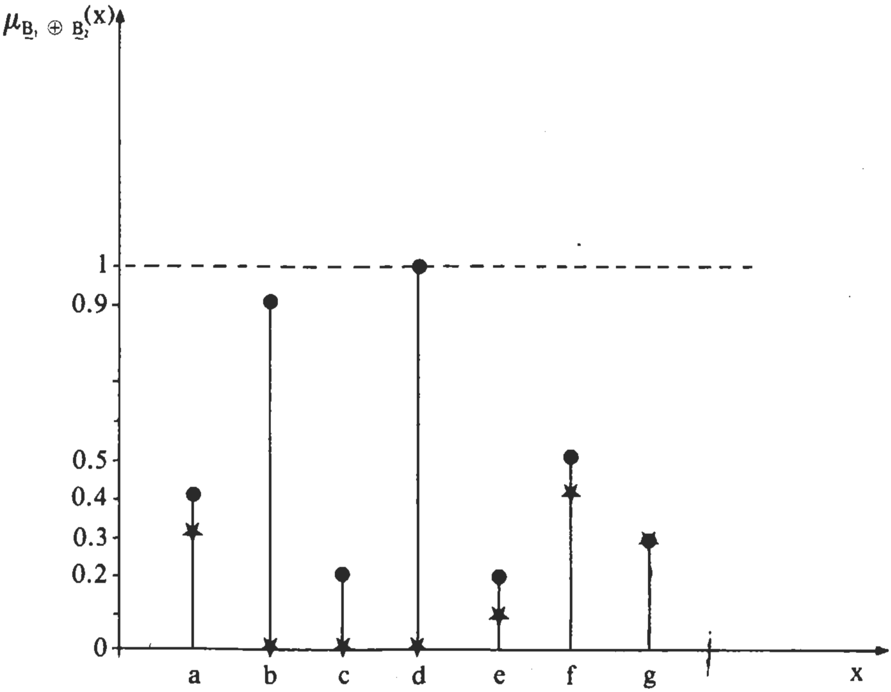
$$\underset{\sim}{B}_1 \oplus \underset{\sim}{B}_2 = (\underset{\sim}{B}_1 \cap \overline{\underset{\sim}{B}}_2) \cup (\overline{\underset{\sim}{B}}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2) =$$

	a	b	c	d	e	f	g
=	0.4	0.9	0.2	1	0.2	0.5	0.3

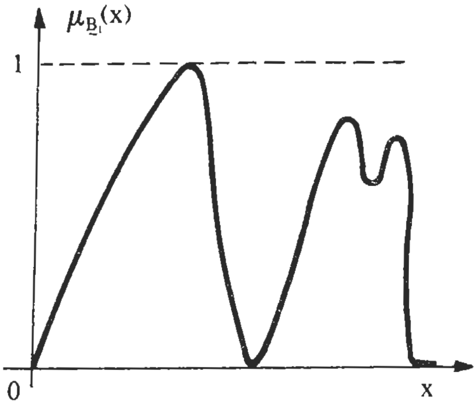
В другой форме

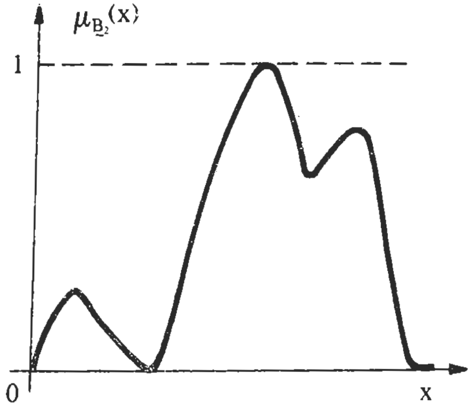
$\underset{\sim}{B}_1 \oplus \underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.4), (b, 0.9), (c, 0.2), (d, 1), (e, 0.2), (f, 0.5), (g, 0.3) \}$.

Графически это можно представить в виде

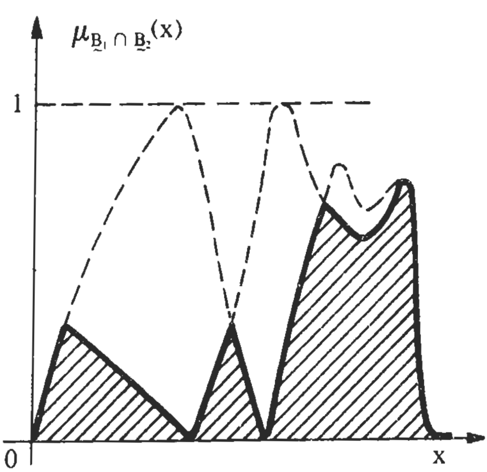


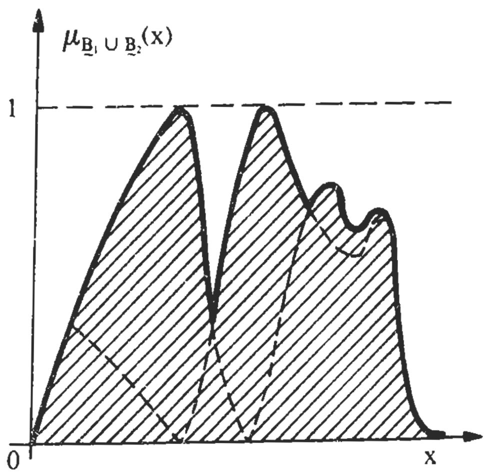
Таким же образом введенные выше операции над нечеткими подмножествами для конечных универсальных множеств определяются и для бесконечных универсальных множеств. В этом случае изменение значений характеристических функций $\underset{\sim}{B}_1$ и $\underset{\sim}{B}_2$ на графиках представляется следующим образом:



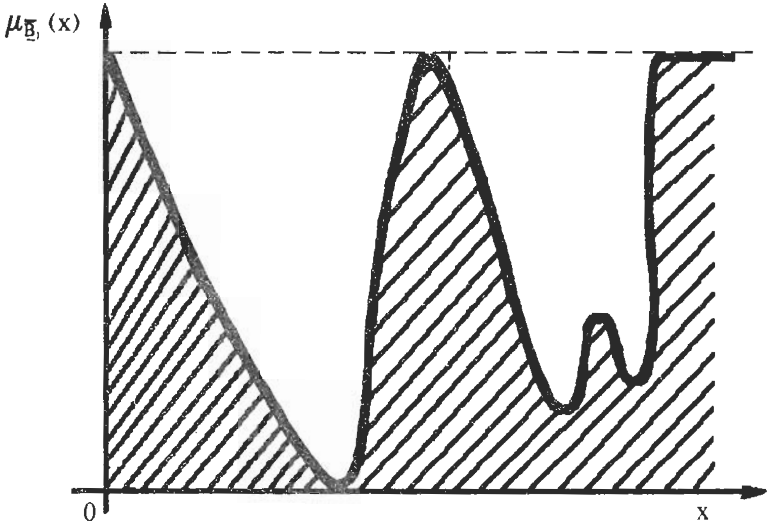


Тогда для пересечения и объединения будем иметь соответственно:

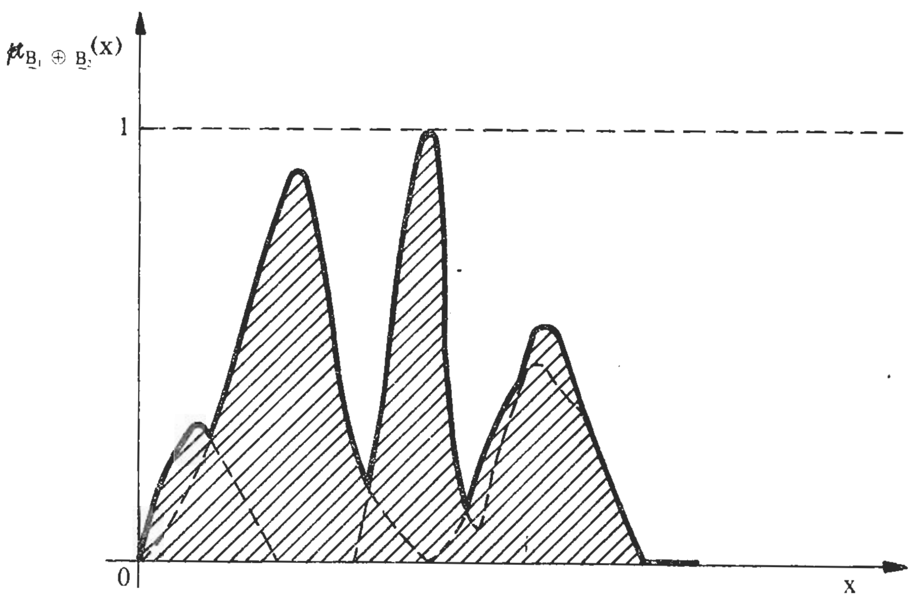




Для дополнения к подмножеству $\underset{\sim}{B}_1$ получаем :



И для дизъюнктивной суммы имеем :



2.3. Величина и оценка

Понятие «величина», используемое в теории множеств, означает данное, имеющее в силу своей объективности общепринятый признак. Оно должно удовлетворять определенным свойствам, среди которых обычно присутствует свойство «аддитивности». Так, когда рассматриваются два обычных подмножества A и B, пересечение которых — пустое множество, то для любой величины, характеризующей подмножество, можно записать

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

В теории вероятностей понятие «величина» также имеет значение, поскольку «событие» представляет собой объективное понятие.

В случаях (в том числе и в теории нечетких множеств), когда делается ссылка на «впечатление» или «представление» субъективного типа, которые невозможно измерить, используют понятие «оценка». Так, для заданных нечетких подмножеств $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ одного универсального множества в предположении, что $\underset{\sim}{A}$ включается в $\underset{\sim}{B}$, т.е. для каждого элемента из $\underset{\sim}{B}$ уровень принадлежности всегда одинаков или больше, чем в $\underset{\sim}{A}$, можно записать

$$v(\underset{\sim}{A}) \le v(\underset{\sim}{B}).$$

Как можно заметить, свойство включения основано на субъективном понятии «впечатление».

В повседневной речи часто смешиваются понятия случая и неопределенности, вероятности и возможности. Считается естественным при встрече двух друзей слышать: «Было маловероятно увидеть тебя здесь». В точном понимании использование слова «вероятно» указывает, что был выделен определенный отрезок времени и подсчитывалось количество единиц времени, когда кто-то находился в данном месте, по отношению к длине всего временного отрезка. Эта величина и есть вероятность встречи. Также использование слова «случай» в его точном понимании должно говорить о существовании определенных вероятностных отношений. Более подходящим для таких ситуаций было бы использование слов «возможность» и «неопределенность». Конечно, в обыденной речи это касается больше этимологических ошибок, чем семантических.

О вероятности говорят, когда можно осуществить измерение, если же это неосуществимо, оценивают возможность. В математике существует теория возможностей так же, как и теория вероятностей, и это различные теории, хотя во многих случаях они могут использоваться одновременно. Например, когда на предприятии получают определенные данные относительно будущих закупок сырья, возможно, что часть этой информации объективна и поэтому измерима, в то время как другая основывается на впечатлениях, и это может быть только оценено.

Существует только одна концепция вероятности, в противоположность ей существует множество концепций оценки. Заде использует оценку, называемую «возможность». Пусть дано универсальное множество (2.3) и некоторое нечеткое подмножество $\underset{\sim}{H}$ из E, называемое «нечетким подмножеством сравнения» или, по-другому, «законом возможности», например, в виде

$\underset{\sim}{H}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0.3	0.8	0	1	0.4	0.2	0.5

.

Если теперь имеется нечеткое подмножество $\underset{\sim}{A}$ из E

$\underset{\sim}{A}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0.3	0.4	0.6	0.2	0	0.9	0.2

,

то для пересечения $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{H}$ получим

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0.3	0.4	0	0.2	0	0.2	0.2

.

«Возможность» $\underset{\sim}{A}$ для «закона» $\underset{\sim}{H}$ будет определяться максимальным уровнем, получаемым на $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$. Таким образом, получим

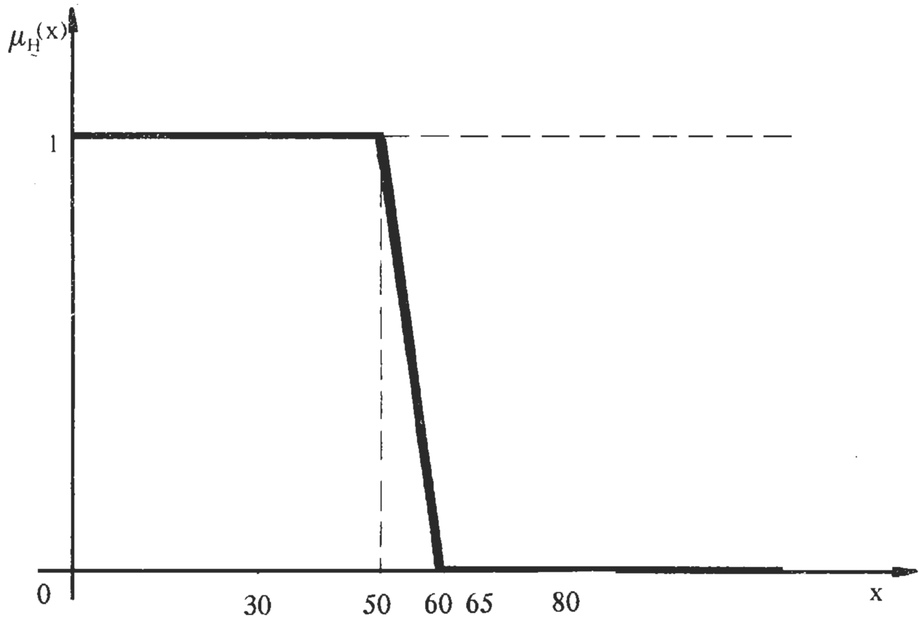
$$v_{\underset{\sim}{H}} (\underset{\sim}{A}) = \text{Max } (0.3, 0.4, 0, 0.2, 0, 0.2, 0.2) = 0.4.$$

В общем виде, если $\mu_{\underset{\sim}{H}}(x)$ — характеристическая функция принадлежности для $\underset{\sim}{H}$ и $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ — для $\underset{\sim}{A}$, то

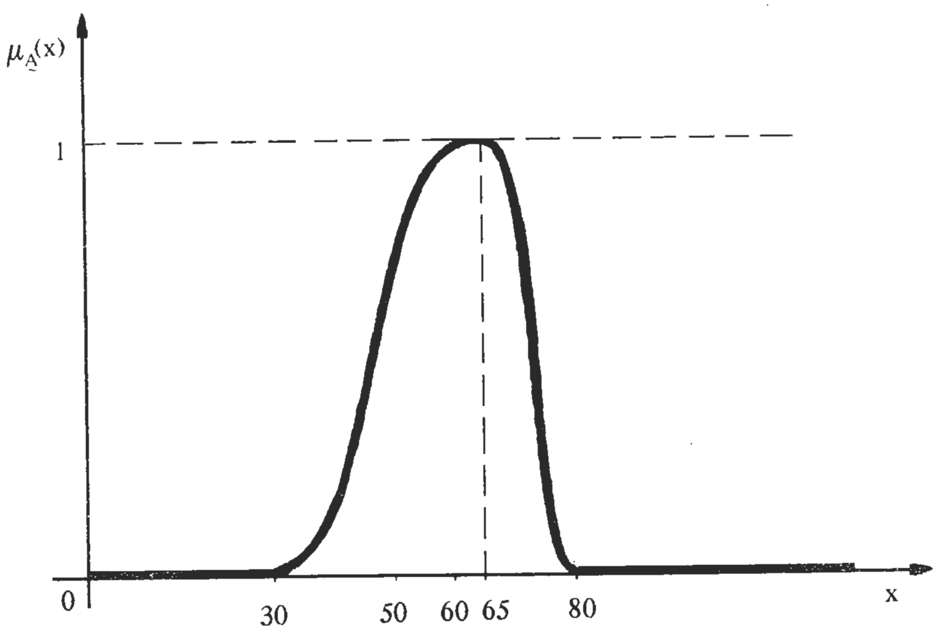
$$v_{\underset{\sim}{H}} (\underset{\sim}{A}) = \text{Max } \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}}(x).$$

На предприятиях возникает много ситуаций, в которых может оказаться полезным использование этой оценки. Так, в связи с перспективой какой-либо закупки сообщается о количестве и качестве сырья. Целесообразность закупки обычно не ставится в жесткую зависимость от цены и существует определенная гибкость, выражающаяся в степени заинтересованности в закупке. Например, предложение принимается при цене до 50, а последующие ситуации могут быть изучены в соответствии с определенным уровнем заинтересованности.

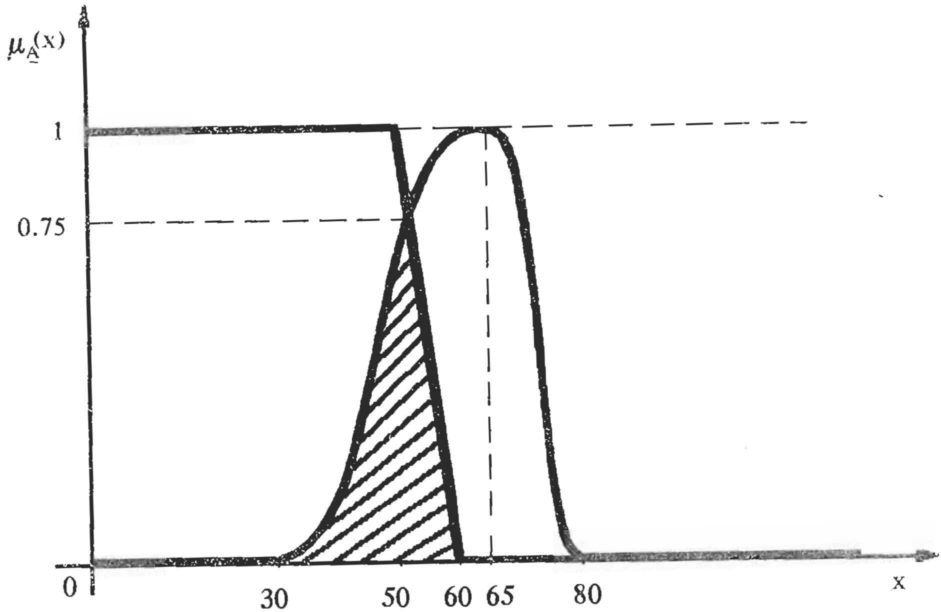
В этом случае «закон возможности» может быть представлен в виде



Пусть, кроме того, имеется нечеткое подмножество $\underset{\sim}{A}$, характеризующее возможность закупки в виде



Тогда пересечение $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$ представляется в виде



Видно, что максимум $\mu_{A \cap H}(x)$ относительно x равен 0,75. Это и есть возможность $\underset{\sim}{A}$ относительно закона $\underset{\sim}{H}$.

Понятно, что закон возможности $\underset{\sim}{H}$ может быть любым другим нечетким подмножеством при условии, что хотя бы одно значение $\mu_{\underset{\sim}{H}}(x)$ равно единице.

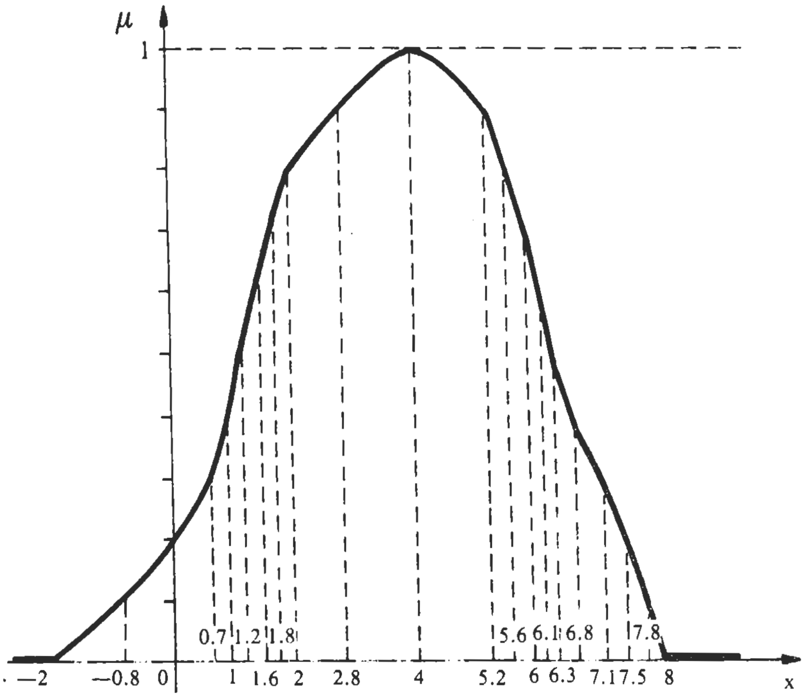
Отметим в завершение, что концепция оценки играет в области нечеткости такую же роль, как и понятие математического ожидания в области вероятностей.

2.4. Нечеткие числа

В области управления предприятием традиционно используются точные числа: баланс сформирован с прибылью в 2 миллиона; оформлено накладных на будущий месяц на 600 тысяч. Не так давно была предложена теория нечетких чисел, которая позволяет приблизить получение количественной оценки реальных фактов к процессу человеческого мышления.

Нечеткое число определяется как нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее нормальную (должно существовать x_i, для которого $\mu(x)$ равно единице) и выпуклую (любое перемещение вправо или влево от этого значения x_i уменьшает $\mu(x)$) функцию принадлежности.

Нечеткое число может быть представлено сегментами, соответствующими определенным уровням — значениям функции принадлежности. Действительно, если представить одно из нечетких чисел в виде



то его можно записать как набор сегментов

$\alpha = 1$	A_1	$= [4 \quad ,4]$
$\alpha = 0.9$	$A_{0.9}$	$= [2.8 \quad ,5.2]$
$\alpha = 0.8$	$A_{0.8}$	$= [2 \quad ,5.6]$
$\alpha = 0.7$	$A_{0.7}$	$= [1.8 \quad ,6]$
$\alpha = 0.6$	$A_{0.6}$	$= [1.6 \quad ,6.1]$
$\alpha = 0.5$	$A_{0.5}$	$= [1.2 \quad ,6.3]$
$\alpha = 0.4$	$A_{0.4}$	$= [1 \quad ,6.8]$
$\alpha = 0.3$	$A_{0.3}$	$= [0.7 \quad ,7.1]$
$\alpha = 0.2$	$A_{0.2}$	$= [0 \quad ,7.5]$
$\alpha = 0.1$	$A_{0.1}$	$= [-0.8 \quad ,7.8]$
$\alpha = 0$	A_0	$= [-2 \quad ,8]$

Можно видеть, что по мере того, как «уровень принадлежности» α уменьшается, получаемые сегменты расширяются таким образом, что предыдущий сегмент вкладывается в последующий. Теория нечетких чисел может рассматриваться как расширение теории интервалов достоверности, когда эти интервалы рассматриваются при всех уровнях от 0 до 1 вместо рассмотрения одного из них.

Если для характеристики нечетких чисел выбрать следующие уровни принадлежности 0.1, 0.2, ..., 0.9 и 1, то любое из них образуется путем наложения «интервалов достоверности». Так, для того же примера

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α = 1				1	1				
α = 0.9				1	1	1			
α = 0.8				1	1	1			
α = 0.7			1	1	1	1			
α = 0.6			1	1	1	1			
α = 0.5			1	1	1	1	1		
α = 0.4			1	1	1	1	1		
α = 0.3			1	1	1	1	1		
α = 0.2		1	1	1	1	1	1		
α = 0.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Это позволяет записать:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	0.2	0.7	1	1	0.9	0.5	0.1	0.1

При этом получаем нечеткое целое число, выделяя уровни принадлежности, или, по-другому, «уровни достоверности» от $\alpha = 1$ до $\alpha = 0.1$. Очевидно, что уровню $\alpha = 0$ соответствует любое целое число.

Исходя из нечеткого числа, можно узнать интервалы достоверности при уровнях от 0.1 до 1 для каждого нечеткого числа. Например, для числа

4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.2	0.7	0.9	1	0.8	0.7	0.4	0.1

получаем

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha = 0.1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\alpha = 0.2$		1	1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.3$			1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.4$			1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.5$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.6$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.7$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.8$				1	1	1			
$\alpha = 0.9$				1	1				
$\alpha = 1$					1				

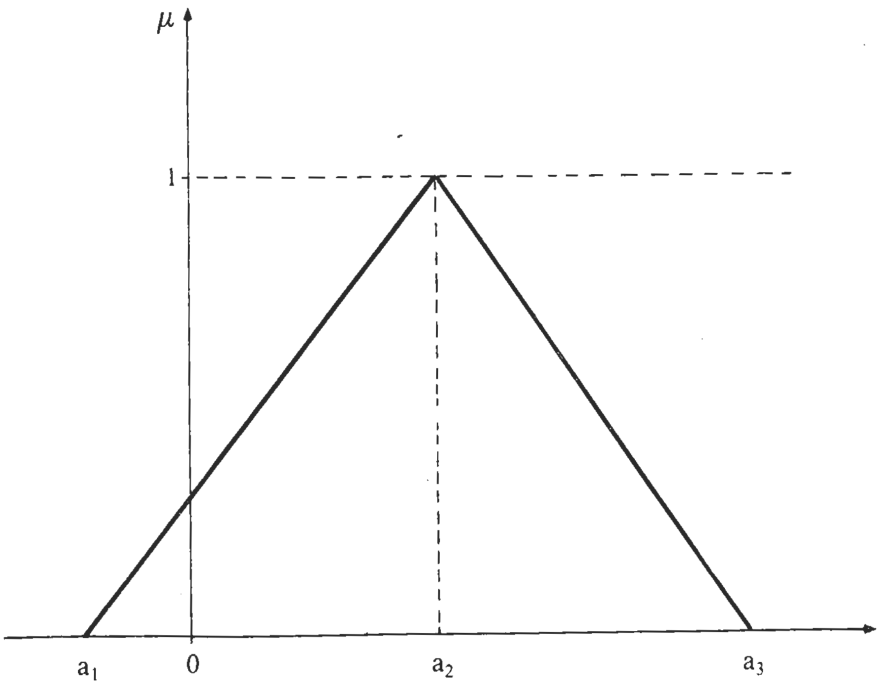
Из вышеизложенного можно сделать вывод, что нечеткое число характеризуется парами «уровень принадлежности» — «интервал достоверности», поскольку каждому уровню принадлежности соответствует интервал достоверности.

При осуществлении операций с нечеткими числами следует действовать так же, как и с обычными действительными числами, используя уровень за уровнем так, как это делается с интервалами достоверности.

Вспомним, например, что в теории интервалов достоверности сложение, вычитание, умножение и деление осуществляются следующим образом:

$$[2, 6] \; (+) \; [4, 9] = [2+4, \; 6+9] = [6, 15],$$
$$[3, 5] \; (-) \; [4, 8] = [3-8, \; 5-4] = [-5, 1],$$
$$[4, 7] \; (\cdot) \; [3, 6] = [4\cdot 3, \; 7\cdot 6] = [12, 42],$$
$$[5, 12] \; (:) \; [4, 10] = [5/10, \; 12/4] = [0.5, 3].$$

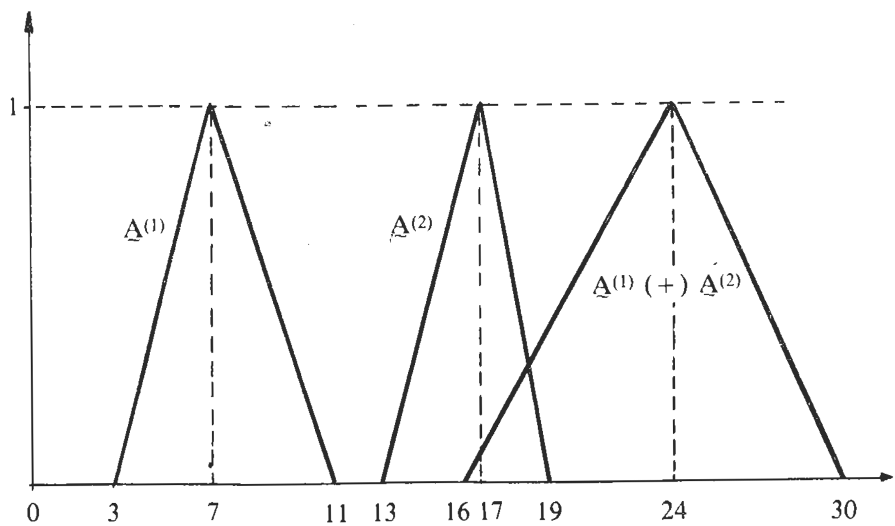
Среди всех нечетких чисел наиболее простыми являются треугольные нечеткие числа. Особенность каждого из них заключается в том, что оно определяется тремя величинами: первой, меньше которой не может быть, второй, больше которой не может быть,и, наконец, третьей, определяющей максимальный уровень принадлежности. Графическое представление треугольного нечеткого числа (a_1, a_2, a_3) имеет следующий вид:



Треугольное нечеткое число позволяет достаточно точно формализовать большое количество ситуаций на предприятии, в которых прогнозируются значения определенных величин. Так, при оценке себестоимости изготавливаемой продукции прогнозируют, что цена не будет ниже 40 и выше 70, при этом возможность, что цена достигнет 55 единиц, наибольшая. Это и определит треугольное нечеткое число. Поскольку в области экономики и управления предприятием изучаются проблемы оценки будущих состояний, эти оценки часто не требуют большой точности. Для планируемого бюджета не требуется точность до сотых долей денежной единицы, но он должен «с хорошим приближением» отражать то, что произойдет в действительности. Оценка сбыта для какого-то периода не может быть абсолютно жесткой, поскольку на него влияет слишком много факторов. При повторяющейся деятельности хорошо работают вероятностные оценки и методы, но в управлении предприятием повторяемость является исключением. Отсюда интерес к использованию нечетких и, в частности, треугольных чисел.

Над треугольными нечеткими числами осуществляются такие же операции, как и над обычными числами: сложение, вычитание и т.п. Если, например, даны числа (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3), то их сумма будет $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$. Однако при выполнении произведения или деления можно получить треугольное приближение, поскольку происходит определенная деформация результата.

Если даны два треугольных нечетких числа (3, 7, 11) и (13, 17, 19), то их сумма будет равна (16, 24, 30), или графически



Можно заметить, что по мере осуществления таких операций, как сложение, вычитание и тому подобных, нечеткие числа растягиваются по абсолютным значениям, хотя относительное отклонение не увеличивается.

ГЛАВА 3. БЮДЖЕТЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

3.1. Планирование в управлении предприятием

Одна из наиболее важных концепций в области исследования управления предприятием — это концепция выбора. Но выбор требует в большинстве случаев каких-то расчетов относительно величин, характеризующих будущее. Отсюда необходимость разработки процесса планирования. Понятие «план» введено впервые в 1925 году в область экономических исследований австрийским экономистом Майером. Понятие планирования часто ассоциируется с понятием вмешательства. В общем под вмешательством понимается деятельность в любой области. В рамках управления предприятием вмешательство в широком смысле слова включает такие аспекты, как организация предприятия, оценка затрат на закупку сырья, разработка бюджета и т.д. Это понятие охватывает слишком различные факты и явления, чтобы быть эквивалентом термину «планирование».

С морально-этической точки зрения результат экономического вмешательства может привести к образованию олигархических формирований и установлению системы стимулов для достижения минимальных затрат времени. Планирование на предприятии является формой вмешательства с помощью норматива, направленного на решение определенных задач, который одновременно создает структуры и описывает функционирование определенных их органов. Поскольку экономическое вмешательство заключается в рациональных действиях, планирование проникает в экономическую действительность, в ее два измерения — функциональность и структуру — посредством систематического воздействия. Введение планирования в число дисциплин, изучающих предприятие, привело к важным изменениям в решении некоторых задач.

К элементам предприятия, которые подверглись наиболее сильным изменениям, относится информация. Решение о внедрении планирования ведет к необходимости располагать большой совокупностью данных. Планирование предполагает описание явлений не только с качественной, но и с количественной стороны. Такие количественные данные являются основой составления планов, которые будут уточняться по мере их воплощения в жизнь.

Деятельность по планированию предусматривает поступление потока информации от управляющих органов к низовым подразделениям. На практике план передается по цепочке вниз таким образом, что исходные указания принимают специфический вид в каждом подразделении. После того, как планы сформулированы, они обсуждаются, принимаются или изменяются и после принятия становятся обязательными для исполнения теми отделами, куда направлялись.

С накоплением опыта планирования в сфере макроэкономики некоторые классические понятия, используемые при изучении предприятий, претерпели изменения, не затрагивающие,тем не менее, самого главного.

Эту эволюцию можно проследить в понятии прибыли. Прибыль в условиях связи экономических параметров с планами устанавливается исходя из себестоимости. К этой величине добавляется плановая прибыль, и этим самым определяется продажная цена, которая, однако, может приниматься или не приниматься во внимание в соответствии с потребностями рынка.

Прибыль, определенная заранее и понимаемая как возможная, будет сравниваться с реально полученной в конце бюджетного года. Прибыли предприятия в денежной наличности зависят, главным образом, от априорной оценки и некоторых отклонений. С другой стороны, из классической теории экономики известно, что прибыль может быть следствием несовершенства рынка или трений в экономической системе.

Способы контроля и корректировки планов включают в себя анализ, направленный на выявление всего диапазона отклонений, происшедших по сравнению с намеченными. Для выявления важности процессов контроля и корректировки, являющихся последними стадиями планирования, необходимо иметь в виду две существенные особенности. Во-первых, основным звеном, которое возникает в планировании на предприятии, является установление «физических» ситуаций, описывающих реальные отношения внутри каждого из отделов: поставок, производственного, сбыта и т.д. На этой основе возникает необходимость осуществления контроля материальных потоков. Во-вторых, установление планов не сводится к простому перечислению физических отношений, существующих внутри каждого подразделения: они должны быть переведены в стоимостное выражение.

В классических исследованиях, посвященных экономике предприятия, взаимосвязи в целом описываются в стоимостном выражении. Если же планирование рассматривается с точки зрения предпринимателя, внимание также обращается на материальные величины: приобретенные, произведенные и распределенные. Наряду с необходимостью денежного баланса возникает необходимость материального баланса. Координация между физическими и денежными элементами приобретает первостепенное значение.

В области микроэкономики план является синтезирующим инструментом экономической жизни предприятия. Если план в денежном выражении включен в общий бюджет, то баланс одновременно будет охватывать результат планов снабжения производства, сбыта и т.п. Планирование и контроль применительно к деятельности предприятия позволили независимо от чисто практической функции подойти к обновлению понятий и систем, и это дает весьма заметные результаты в последние годы.

3.2. Обоснование бюджетов предприятия

Процесс планирования на предприятии — одна из наиболее важных работ, которые определяют его экономико-финансовую деятельность. Именно при этом проводится оценка потребностей предприятия в финансовых средствах с учетом затрат, на которые придется пойти при осуществлении планов. Разработано много схем для наиболее адекватной оценки действительности.

Существует безусловная связь между потребностью в активах со стороны предпринимателя и объемом реализации, которую предполагает осуществить предприятие в предстоящем финансовом году. Очевидно, что растущее предприятие нуждается в новых инвестициях для увеличения общих мощностей, расширения процесса производства и получения товаров, которые могут найти спрос. Но эти инвестиции требуют соответствующего финансирования, а оно в большей части случаев не может быть получено при помощи обычных накоплений самого предприятия. Появляется необходимость использовать внешние источники финансирования. Эти финансовые средства имеют цену, определяемую типом процентов. Но кроме этих долгосрочных потребностей существуют также краткосрочные потребности в денежных средствах, возникающие, главным образом, при нормальной деятельности предприятия. Они обуславливаются в основном внешними факторами, к которым относятся, например, инфляционные процессы и даже изменение вкусов потребителей, приводящими к изменению номенклатуры производимых товаров. Таким образом, независимо от важности, которую приобретают долгосрочные бюджеты, устанавливаются так называемые краткосрочные бюджеты или фактические бюджеты, как их обычно называют в финансовой практике.

Бюджеты предприятий могут рассматриваться в качестве финансовых планов. Финансовое планирование существует явно или косвенно во всех социальных ячейках. Так, семья в определенной степени составляет свой бюджет,когда,определяя свои доходы, решает, какая часть расходов пойдет на питание, образование детей, оплату жилья, развлечения, покупку товаров длительного пользования (телевизор, автомашина, холодильник и т. п.) и сбережения. Подобным же образом государство разрабатывает бюджеты доходов и расходов, в которые, кроме источников поступления, например налогов, входят также расходы на оборону, образование, сельское хозяйство, промышленность, культуру и пр. Подобным же образом предприятия могут разрабатывать свои планы, в которых должны найти количественное выражение понятия, служащие для получения финансовых средств и покрытия затрат предприятия по оплате рабочей силы, закупке сырья, обновлению оборудования и т.п.

Если изначально бюджет задумывался как средство, направленное на ограничение расходов предприятия, то в настоящее время его цель значительно более широкая, поскольку направлена, кроме всего, на более рациональное, т.е. лучшее с экономической точки зрения использование средств, которыми предприятие располагает для удовлетворения своих потребностей. Разработка бюджета превратилась в важное средство улучшения деятельности предприятия в целом при более тесной связи с поставленными целями. При разработке бюджета необходимо следовать некоторым определенным целям. Цели, присущие бюджету, должны быть жесткими, но реалистичными, поскольку установление «идеальных» бюджетов может привести к разочарованию и неудаче тех, кто должен выполнять запланированное. Разработка бюджета без каких-либо устремлений является другой крайностью, приводящей к отсутствию экономических стимулов и неэффективности средств контроля.

Бюджет позволяет заранее в общих чертах оценить изменения, в которых нуждается предприятие для достижения своих целей, сохраняя перспективы дальнейшего развития. Поскольку бюджет представляет собой синтез величин, в пределах которых осуществляется деятельность предприятия, он позволяет достичь лучшего понимания процесса функционирования предприятия, что со временем может привести к оптимальному достижению поставленных целей. Действия, направленные на исполнение бюджета, связаны с осуществлением анализа, который часто ведет к усилению внутренней координированности, поскольку позволяет выделить задачи, которые в противном случае решались бы многими отделами предприятия по отдельности.

В каждой из областей деятельности предприятия (инвестиционной, производственной, финансовой, кадровой, торговой) глобальные решения, связанные с бюджетом, оказывают решающее влияние на прибыли, которые предприятие намерено получить. Именно через бюджет можно получить оценку сводного балланса на будущее и расчеты предусмотренных прибылей и убытков. Установление исходных значений для составления бюджета, как правило, начинается с постановки целей. Эти цели обычно устанавливаются на долгий срок, исходя из прогноза сбыта, в котором определяется количество и виды продукции, изготавливаемой в планируемый период. Очевидно, что предусматриваемый сбыт ведет к необходимости осуществления определенных инвестиций, обеспечиваемых ожидаемым потоком денежных поступлений, а также посредством внешнего финансирования.

При сравнении бюджета с фактически полученными экономическими параметрами наблюдаются отклонения, связанные с двумя типами причин: внешними, связанными с состоянием экономической ситуации в целом, и внутренними, связанными с функционированием самого предприятия. Возможно, что из-за этого двойного влияния и появились так называемые гибкие бюджеты, в которых при различных уровнях сбыта и соответственно производства будут различными объемы издержек. В этом случае предприятие может допустить разные выплаты при каждом из альтернативных уровней сбыта. Встает вопрос о выборе из нескольких альтернативных бюджетов такого, который бы больше подходил соответствующему периоду. Основа, на которую опираются сторонники гибких бюджетов, — это способность быть измененным при изменении обстоятельств.

Бюджеты, которые разрабатываются на основе данных, зарегистрированных за прошлые периоды, часто неэффективны, поскольку включают ранее существовавшие расходы, переходящие на последующие годы, что ведет к нежелательным выплатам. Именно поэтому в последние годы широко распространился новый метод разработки бюджета предприятия, называемый базовым начальным бюджетом (БНБ).

3.3. Базовый начальный бюджет

Одним из наиболее существенных недостатков традиционных бюджетов является использование данных о предшествующих ситуациях и проецирование их на будущее и, следовательно, перенос результатов ранее принятых и, возможно, нерациональных решений на очередные планируемые периоды. Концепция базового начального бюджета устраняет среди прочих и этот недостаток. При этом в качестве исходного принципа устанавливается необходимость аргументировать любые типы выплат, которые будут иметь место в будущем, отвергая в качестве основы для бюджета предшествующие годы и, таким образом, «начинать с нуля». Этот метод разработан в 1970 году Петером Пирром. Однако понадобилось более пяти лет для его распространения. Главные цели метода не отличаются от тех, которые ставятся классическим бюджетом, и требуют разработки процесса планирования, достижения оптимального распределения ресурсов, доведения затрат до соответствующих размеров и, конечно же, улучшения деятельности предприятия.

Для того чтобы бюджет, выработанный в соответствии с традиционными моделями, мог считаться согласованным, он должен отвечать следующим условиям:

1) все стороны деятельности предприятия должны быть одинаково важными для его нормального функционирования;

2) на будущее должна сохраниться та же степень эффективности, что и в прошлые периоды;

3) ассигнование средств должно осуществляться адекватно.

Очевидно, что в настоящее время предприятия работают в обстановке быстрых изменений и будущее не может представляться как простая проекция прошлого. Поэтому бюджет, выработанный в соответствии с классическими схемами, не отвечает современным требованиям предприятий. Принципы, на которых основывается БНБ, другие. Предусматривается распределение средств предприятий для каждого «центра решений» в соответствии с намеченными ими целями с тем, чтобы эти цели были достигнуты. Однако если проблема нехватки чего-либо является главнейшей для предприятия как экономической единицы, необходимо «создать систему градаций подобных нужд». Другими словами, необходимо определить относительную важность каждой из указанных целей относительно других.

Для претворения в жизнь такой последовательности приоритетов каждый центр решений должен обосновать все и каждую из запрашиваемых денежных сумм. Это может быть достигнуто только при четком делении видов деятельности, их оценке и упорядочении их приоритетов. В БНБ важное значение приобретает подготовка конкретных предложений на первом шаге обоснования приоритетов.

Очевидно, что содержание таких специфических предложений должно включать определенное число достаточно ясных элементов для того, чтобы можно было принять решение об осуществлении или неосуществлении предполагаемой деятельности или, по-другому, включении или невключении выплат, входящих в соответствующий бюджет. Среди таких элементов должны быть следующие: описание деятельности относительно общих целей предприятия; связанные с этим расходы, другими словами, денежные выплаты; экономические результаты, которые будут достигнуты при осуществлении деятельности. Также следует определить, каковы будут последствия невключения какой-либо деятельности в число предусмотренных предприятием на период, охватываемый бюджетом. Одно из преимуществ БНБ базируется на том, что каждое специфическое предложение должно формулироваться для разных уровней активности и соответственно для разных уровней стоимости. Эта особенность представляет собой отражение экономической действительности, когда одна и та же деятельность на предприятии может осуществляться с различной степенью интенсивности. Поэтому необходимо рассматривать минимальную базу активности, максимальную и несколько промежуточных, понимая при этом, что цели, поставленные на каждом уровне, будут достигаться также в определенной степени. То, что различные центры решений могут осуществлять свои предложения на разных уровнях активности, приводит к мысли о возможности подключения теории нечетких множеств в случае использования этой схемы.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим следующий пример. Предприятие располагает четырьмя центрами решений A, B, C, D. Для A определяются три бюджета A_0, A_1, A_2, для B — два B_0, B_1; для C — четыре C_0, C_1, C_2, C_3; для D — три D_0, D_1, D_2. Пусть бюджеты с индексом 0 — минимально необходимые для функционирования соответствующего центра решений. Бюджеты с индексами 1, 2, 3 содержат обоснованные надбавки. При использовании БНБ один из первых шагов заключается в последовательном выборе, начиная с бюджета с индексом 0. Пример последовательного выбора можно увидеть при переходе от рис.3.1 к 3.2, где показано, что выбран C_0, и т.д.

Начальный граф

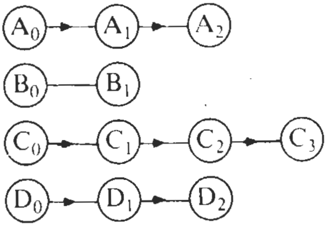


Рис. 3.1

Выбирается C_0

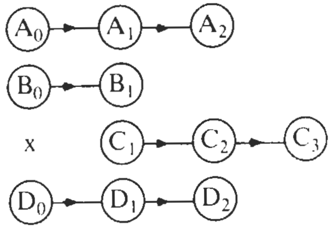


Рис. 3.2

Выбирается D_0

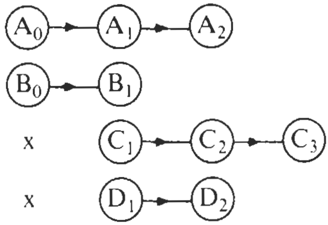


Рис. 3.3

Выбирается C_1

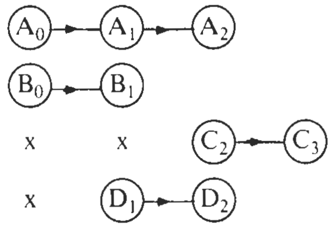


Рис. 3.4

Выбирается A_0

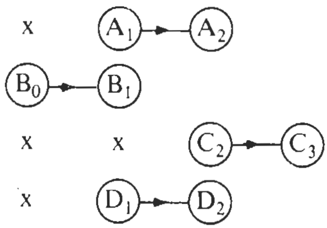


Рис. 3.5

Выбирается A_1

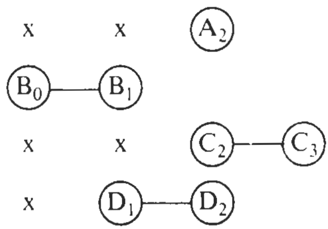


Рис. 3.6

Выбирается B_0

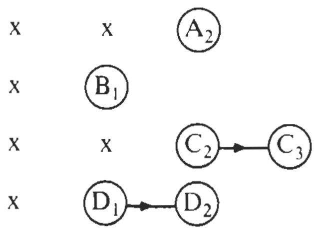


Рис. 3.7

Выбирается A_2

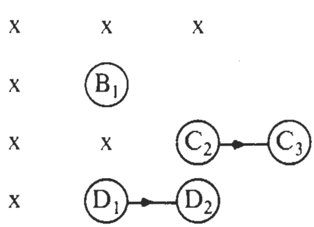


Рис. 3.8

Выбирается C_2

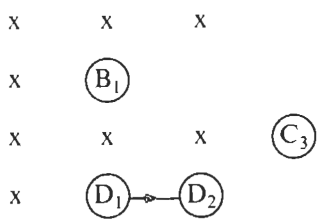


Рис. 3.9

Выбирается B_1

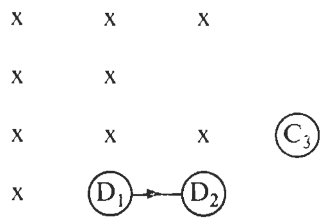


Рис. 3.10

Выбирается C_3

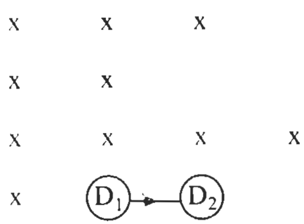


Рис. 3.11

Выбирается D_1

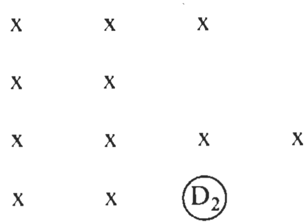


Рис. 3.12

В соответствии с порядком выбора, указанным на рис. 3.1—3.12 бюджеты последовательно растут:

$$
(3.1)\quad \left\{ \begin{array}{c} C_0,\ C_0 + D_0,\ C_1 + D_0,\ A_0 + C_1 + D_0,\ A_1 + C_1 + D_0, \\ A_1 + B_0 + C_1 + D_0,\ A_2 + B_0 + C_1 + D_0,\ A_2 + B_0 + C_2 + D_0, \\ A_2 + B_1 + C_2 + D_0,\ A_2 + B_1 + C_3 + D_0,\ A_2 + B_1 + C_3 + D_1, \\ A_2 + B_1 + C_3 + D_2. \end{array} \right.
$$

Если предположить, что имеется общий бюджет L, который находится в границах

$$
(3.2)\qquad A_2 + B_1 + C_3 + D_0 \le L \le A_2 + B_1 + C_3 + D_1,
$$

то окажется, что будут приняты бюджеты A_2, B_1, C_3 и D_0.

Если бы, напротив, общий бюджет L был таким, что

$$(3.3) \qquad A_1 + C_1 + D_0 \leq L \leq A_1 + B_0 + C_1 + D_0,$$

то были бы приняты бюджеты A_1, C_1 и D_0 и центр решений B вместе с его деятельностью оказался бы ненужным.

3.4. Использование нечетких чисел в БНБ

С целью введения теории нечетких множеств в разработку бюджета методом БНБ предположим, что бюжеты A, B, C, D являются нечеткими числами (т.е. нечеткими подмножествами с выпуклыми и нормальными функциями принадлежности) и при этом заданы $\underset{\sim}{A}_i$, i=0, 1, 2; $\underset{\sim}{B}_j$, j=0, 1; $\underset{\sim}{C}_k$, k=0, 1, 2, 3; $\underset{\sim}{D}_l$, l=0,1,2.

Предполагается, что удовлетворяются перечисленные ниже свойства.

Если $\underset{\sim}{M}_\beta$— какой-то нечеткий для центра решения M бюджет с индексом β, то его α-сечение будет

$$(3.4) \qquad M_\alpha = [m'^{\alpha}_{\beta},\ m''^{\alpha}_{\beta}] \ ,$$

и должно удовлетворяться следующее свойство :

$$(3.5) \qquad (\beta < \beta') \Rightarrow (m'^{\alpha}_{\beta} \leqslant m'^{\alpha}_{\beta'},\ \ m''^{\alpha}_{\beta} \leqslant m''^{\alpha}_{\beta'}) \quad \forall \alpha \in [0,\ 1] \ .$$

Это свойство монотонности может быть записано в виде

$$(3.6) \qquad \underset{\sim}{M}_\beta \ \underset{\sim}{\leqslant} \ \underset{\sim}{M}_{\beta'} \ .$$

Для упрощения записи символы $\leq$ и $\underset{\sim}{\leqslant}$ часто заменяются на < и $\underset{\sim}{<}$.

Если взять пример из предыдущего параграфа, то в условиях нечеткости (3.1) запишется в виде

$$(3.7) \quad \begin{cases} \underset{\sim}{C}_0,\ \underset{\sim}{C}_0 (+) \underset{\sim}{D}_0,\ \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0,\ \underset{\sim}{A}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0,\ \underset{\sim}{A}_1 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0, \\ \underset{\sim}{A}_1 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0,\ \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0, \\ \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_2 (+) \underset{\sim}{D}_0,\ \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_1 (+) \underset{\sim}{C}_2 (+) \underset{\sim}{D}_0, \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ \underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0, \ \underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_1, \\ \underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_2, \end{cases}$$

где, как уже известно, (+) является оператором свертки maxmin для суммы:

$$\forall \, x, y, z \in R^+$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta \, (+) \, \underset{\sim}{M}_{\beta'}}(z) = \bigvee_{x+y=z} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) \, .$$

Здесь R^+ — множество неотрицательных действительных чисел и символы $\vee$ и $\wedge$ означают, что «берется самое большое» и «берется самое малое» соответственно.

Если, например,

$\underset{\sim}{M}_\beta =$

3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.1	0.5	0.8	1	0.9	0.4	0.2	0

,

$\underset{\sim}{M}_{\beta'} =$

3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.1	0.5	0.8	1	0.9	0.4	0.2	0

,

$\underset{\sim}{M}_\beta \ (+) \ \underset{\sim}{M}_{\beta'} =$

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0.1	0.1	0.2	0.5	0.7	0.8	1	0.9	0.8	0.4	0.3	0.2	0

,

то функция принадлежности при 4 :

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = 0.1 \wedge 0 = 0,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = 0 \wedge 0.1 = 0,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0 \wedge 0.2 = 0,$$

. . . .

$$\bigvee_{x+y=5} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) = 0 ,$$

при 5

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = 0.5 \wedge 0 = 0 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = 0.1 \wedge 0.1 = 0.1 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0 \wedge 0.2 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bigvee_{x+y=5} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y) = 0.1 ,$$

при 6

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = 0.8 \wedge 0 = 0 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = 0.5 \wedge 0.1 = 0.1 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0.1 \wedge 0.2 = 0.1 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(3) = 0 \wedge 0.7 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bigvee_{x+y=6} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y) = 0.1 ,$$

при 7

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(7) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = 1 \wedge 0 = 0 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = 0.8 \wedge 0.1 = 0.1 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0.5 \wedge 0.2 = 0.2 ,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(3) = 0.1 \wedge 0.7 = 0.1 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bigvee_{x+y=7} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y) = 0.2 ,$$

и т. д.

Можно предположить, что имеющийся в наличии общий бюджет также является нечетким и может рассматриваться как «нечеткий потолок» с графиком вида

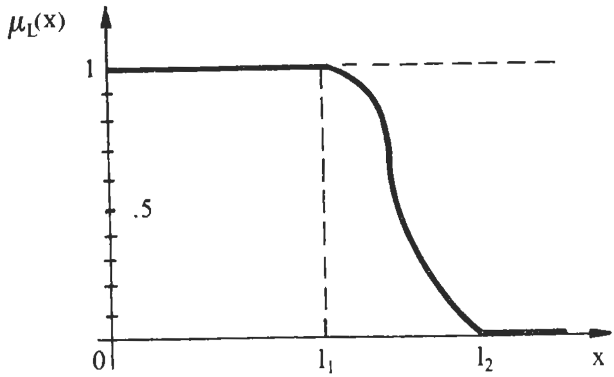


Рис. 3.13

так что

$$\mu_{\underset{\sim}{L}}(x) = \begin{cases} 1, & x \le l_1, \\ \text{монотонно убывающей функции}, & l_1 \le x \le l_2, \\ 0, & l_2 \le x. \end{cases}$$

Если рассматривать $\underset{\sim}{X}$ как один из накопленных бюджетов, имеющихся в (3.7), то, используя концепцию возможности, получим

$$\text{Возм.}\ (\underset{\sim}{X}) = \bigvee_{x} (\mu_{\underset{\sim}{X}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{L}}(x)) \quad .$$

В этом случае в отличие от процессов возможных уступок в детерминированной постановке (как это сделано в (3.1) и (3.2)) решение получается сравнением таких пар, как

$$(\underset{\sim}{X}, \text{Возм.}\ (\underset{\sim}{X})).$$

Таким образом, получаем методику решения задачи выбора бюджета при условии нечеткости БНБ.

Вышеизложенное иллюстрируется следующим примером. Предположим, что каждый нечеткий бюджет имеет треугольную функцию принадлежности вида

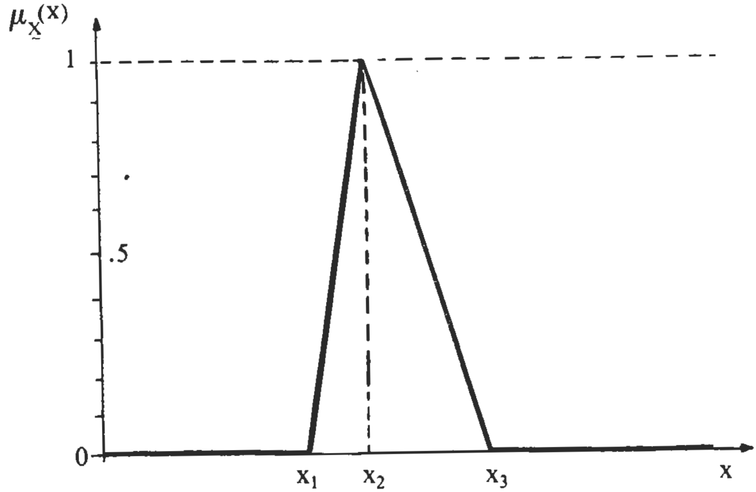


Рис. 3.14

Тогда нечеткие числа могут быть представлены с помощью троек (x_1, x_2, x_3) и их свертка получается сразу:

$$\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2, x_3),$$

$$\underset{\sim}{Y} = (y_1, y_2, y_3),$$

$$\underset{\sim}{X} \ (+) \ \underset{\sim}{Y} = (x_1, x_2, x_3) \ (+) \ (y_1, y_2, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Логично, что предположение о треугольной функции принадлежности сделано для упрощения, и рассуждения легко перенести на общий случай.

Допустим далее для простоты, что «нечеткий потолок» является линейной функцией между l_1 и l_2 и имеет вид

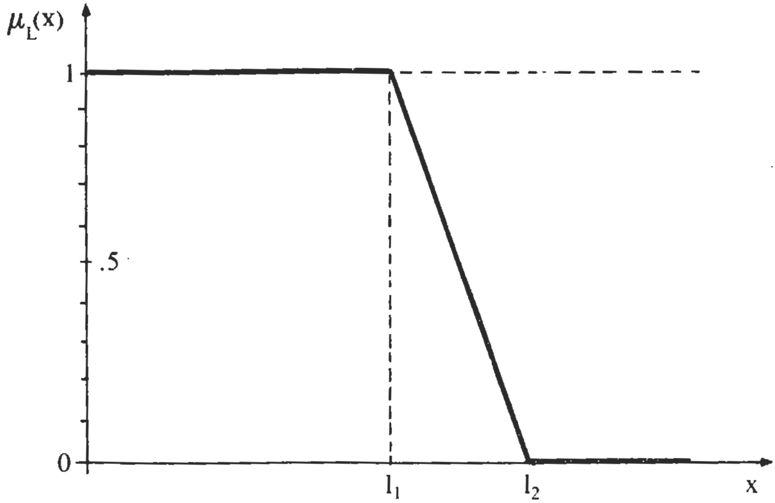


Рис. 3.15

Пусть теперь

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}_0 &= (1000,\ 1100,\ 1250),\\
\underset{\sim}{A}_1 &= (1200,\ 1250,\ 1400),\\
\underset{\sim}{A}_2 &= (1500,\ 1600,\ 1900),\\
\underset{\sim}{B}_0 &= (800,\ 1000,\ 1300),\\
\underset{\sim}{B}_1 &= (1300,\ 1400,\ 1700),\\
\underset{\sim}{C}_0 &= (400,\ 500,\ 700),\\
\underset{\sim}{C}_1 &= (500,\ 650,\ 800),\\
\underset{\sim}{C}_2 &= (650,\ 800,\ 950),\\
\underset{\sim}{C}_3 &= (800,\ 1000,\ 1200),\\
\underset{\sim}{D}_0 &= (1000,\ 1200,\ 1300),\\
\underset{\sim}{D}_1 &= (1250,\ 1400,\ 1700),\\
\underset{\sim}{D}_2 &= (1500,\ 1700,\ 1800).
\end{aligned}$$

Из (3.7) найдем накопленные бюджеты:

1) $\underset{\sim}{C}_0 = (400,\ 500,\ 700)$,

2) $\underset{\sim}{C}_0\ (+)\ \underset{\sim}{D}_0 = (400+1000,\ 500+1200,\ 700+1300) =$
$= (1400,\ 1700,\ 2000)$,

3) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (500 + 1000, 650 + 1200, 800 + 1300) =
= (1500, 1850, 2100)

4) $\underset{\sim}{A}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (2500, 2950, 3350),

5) $\underset{\sim}{A}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (2700, 3100, 3500),

6) $\underset{\sim}{A}_1$ (+) $\underset{\sim}{B}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (3500, 4100, 4800),

7) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (3800, 4450, 5300)

8) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_2$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (3950, 4600, 5450),

9) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_2$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (4450, 5000, 5850),

10) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$ = (4600, 5200, 6100),

11) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_1$ = (4850, 5400, 6500),

12) $\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_2$ = (5100, 5700, 6600).

С другой стороны, предположим, что «нечеткий потолок» определяется функцией

$$\mu_{\underset{\sim}{L}}(x) = \begin{cases} 1 \,, & x \le 5000 \,, \\ 6 - \dfrac{x}{1000} \,, & 5000 \le x \le 6000 \,, \\ 0 \,, & 6000 \le x \,. \end{cases}$$

На рис.3.16 графически показан расчет возможностей бюджетов с номерами от 7) до 12).

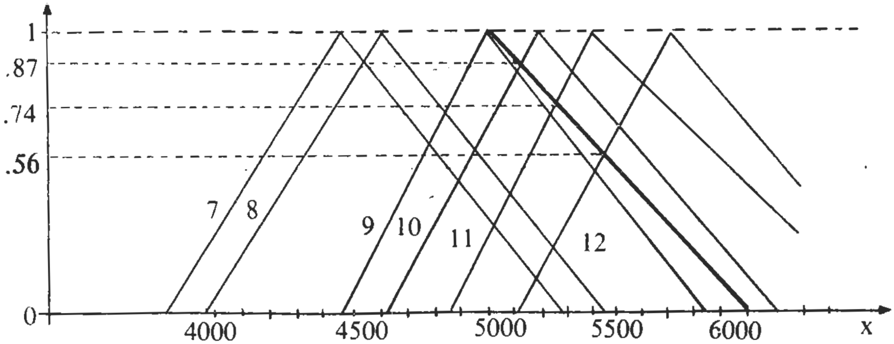


Рис.3.16

Можно рассмотреть следующие возможности, которые назовем «уровнями согласия»:

	Накопленные бюджеты	Уровень согласия
7)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0$	1
8)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0$	1
9)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0$	1
10)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0$	0.87
11)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_1$	0.74
12)	$\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_2$	0.56

Таким образом, бюджеты с номерами до 9) принимаются при уровне 1, а потом «уровень» принятия быстро убывает. Этот пример показывает, что использование нечетких БНБ оказывается очень удобным для принятия решений на предприятии.

Можно также воспользоваться другим критерием, связанным с общей суммой бюджета. На рис. 3.17 представлен нечеткий накопленный бюджет $\underset{\sim}{A}$ и нечеткий потолок $\underset{\sim}{L}$.

Назовем «показателем согласия» число

$$K(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{L}) = \frac{\text{область } (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{L})}{\text{область } (\underset{\sim}{A})}.$$

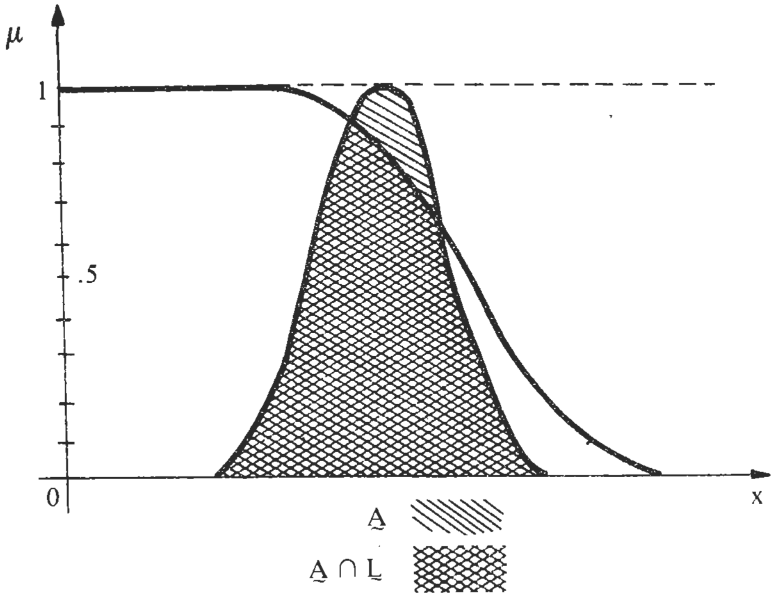


Рис. 3.17

Этот показатель может оказаться очень существенным для выбора накопленного бюджета методом БНБ. Однако надо отметить, что этот показатель в отличие от показателя возможности не является оценкой.

Анализ базового начального бюджета определяет интерес, который приобретает понятие нечеткости при решении проблем с неоднозначными данными.

ГЛАВА 4. МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ИНВЕСТИЦИЙ

4.1. Планирование капитальных вложений на предприятии

Финансовые средства, которыми располагает предприятие в определенный период времени, имеют целью удовлетворение потребностей, вызываемых в какой-то степени процессом производства, которое понимается в очень широком смысле. При рассмотрении того, куда будут направлены финансовые ресурсы предприятия, обычно принимают за основу теорию исчислимой периодизации. Отсюда возникает понятие инвестиций, связанное с применением средств, не расходуемых в пределах одного бюджетного года. Можно сказать, что превращение денежных средств в объект инвестирования происходит через определенные объемы имущества, представляющего собой фиксированную структуру предприятия.

Исследование проблемы капиталовложений дает основание сказать, что их результаты ведут к появлению величин, связанных с различными моментами времени. Время в этом случае проявляется как пассивный элемент при рассмотрении ситуации и не влияет существенным образом на значения, принимаемые основными параметрами модели, формализующей процесс. В первом приближении время представляет собой основу, на которой происходят события.

Если факты, протекающие во времени, имеют экономический характер, то они становятся важными для предпринимателя, поскольку имеют финансовые последствия или могут представлять «надежду», измеряемую в денежном выражении. Связь между прошлым и будущим в деятельности, связанной с инвестициями, позволяет рассмотреть, кроме ее субъекта, которым является личность предпринимателя, три главных элемента: объект инвестиций, объем капиталовложений и надежду на получение «чего-то» как результат инвестиций. В этом контексте не удивительно, что для изучения процесса инвестирования с экономической точки зрения приходится использовать понятие, которое часто применяется при построении математических моделей финансирования. Имеется в виду понятие так называемого «финансового капитала». Преимущество его использования в том, что оно, кроме денежной массы, включает момент времени, в который она локализуется независимо от того, получается ли она или расходуется. Можно отметить, что в теории капиталовложений большая часть разработанных моделей исходит из стабильности экономической системы, при этом прямо или косвенно считается, что типы процентов, которые установятся в будущем, а также остальные параметры известны с абсолютной достоверностью.

Однако в действительности экономическая ситуация оказывается изменчивой, и количество параметров, которые влияют на определение оптимальных размеров инвестиций, большое. Для того чтобы помочь в деле управления имеющимся таланту и интуиции предпринимателя, эмпирические предположения и гипотезы сводятся в систему аксиом для выработки моделей, которые явились бы наиболее точным отражением реального процесса инвестиций. Модель должна быть количественной, поэтому способы ее анализа и внедрения основываются на математике. Изменения значений некоторых из параметров будут выражаться символами, а итоговые результаты применения системы также должны быть количественными.

Исходя из огромной сложности явлений, связанных с инвестициями, с самого начала ясно, что выработанные для них модели не могут быть точным отражением действительности, а являются приближением, которое будет тем пригоднее, чем точнее описаны параметры, участвующие в процессе. Важно, что знание предпринимателем результатов анализа модели, несмотря на то что они не являются точными, в определенной мере ограничивает область допустимых решений и тем самым облегчает выбор и уменьшает возможность ошибки.

Когда предприятие пересматривает свои возможности в области производства и желает поменять оборудование, перед ним стоит альтернатива выбора оптимального решения, которое может быть направлено на:

1) осуществление вложения для приобретения нового оборудования;

2) обновление наличного оборудования.

Как в первом, так и во втором случае приводятся в движение денежные массы в виде затрат, которые предприятие попытается компенсировать.

Для получения наибольшей отдачи от вложенных средств необходимо изучить каждую из разнообразных возможностей. Таким образом, появляется проблема выбора. Выбор заключается в альтернативе между покупкой какого-то оборудования и отказом от покупки. Однако в ситуации, когда имеется масса предприятий, занимающихся выпуском оборудования разнообразных видов и моделей, следует задуматься над различными объектами инвестиций. Целесообразно узнать, какое конкретное оборудование отвечает ряду определенных условий, чтобы оно было наиболее подходящим с экономической точки зрения.

За последние годы исследования процесса капиталовложений претерпели серьезные изменения из-за развития математических методов, служащих для методологического обоснования выбора наилучших решений. Предположение о детерминированности, до недавних пор общее для всех микроэкономических моделей капиталовложений, было дополнено введением случайных воздействий. Это привело к тому, что в области изучения процесса инвестиций появились модели, в которые было внесено понятие вероятности. Однако вероятностный подход требует знания определенной информации, которая разделяется на две категории. Во-первых, необходимо описать совокупность возможных ситуаций и, во-вторых, совокупность благоприятных исходов. Таким образом, числовой вероятностный признак указывает на «что-то», связанное с относительной частотой появления определенного события в множестве событий.

Введение понятия вероятности в модели капиталовложений, хотя и позволило достичь значительных успехов, также высветило многочисленные трудности при претворении в жизнь теоретических схем. В жизни общества недостижимо, чтобы какое-либо явление повторялось достаточное количество раз, что было бы обоснованием введения вероятности. Открытие новых направлений в математике позволило дать новые стимулы в развитии экономических методов, используемых в области инвестиции. Для этого, в дополнение к классическим методам, можно воспользоваться теорией нечетких множеств, которая во многих областях привела к большим сдвигам в решении проблем, возникающих перед обществом.

4.2. Определение видов процентов

Элементы денежного потока капиталовложений различны в разные моменты времени. Это приводит к тому, что один и тот же товар, поступающий в разные моменты, рассматривается как два разных товара. Поэтому нельзя непосредственно осуществлять сложение и другие операции. Для того чтобы преодолеть эту сложность, прибегают к системе цен. Действительно, при рассмотрении задачи, в которой величины должны рассматриваться в разные моменты времени, цена, играющая основную роль, представляет собой вид процентов, который может рассматриваться как связь между настоящим и последующими этапами. Наличие определенного вида процентов оказывает несомненное влияние на решения предпринимателя. В самом деле, в принципе существует тенденция обращаться за ссудой, когда процент низкий, и понятно, что предприниматель ограничивает свою деятельность при высоком проценте, поскольку может получать хорошую «цену» при помещении своего капитала на рынок капиталов. Учет вида процентов более важен тогда, когда он происходит косвенно, поскольку представляет основу сравнения, которая вместе с понятием равновесия является существенной в любом микроэкономическом исследовании инвестиций.

Вместе со сведением набора наличных денежных масс в различные моменты времени к единой величине при помощи метода актуализации, который будет описан ниже, решается задача «порядка предпочтения» между наборами капиталов. При этом различают частичный и полный порядки. При частичном порядке производятся сравнения конкретных денежных масс внутри совокупности, образованной каждым из потоков платежей и поступлений. Когда для каждого из периодов разница между поступлениями и платежами, соответствующими одному объекту, является наивысшей по сравнению с другими, нет сомнения относительно выбора, основанного на экономических критериях. Выбор вызывает сомнения, когда требуется сравнить инвестиции, предусматривающие бóльшую разницу для одного объекта за несколько периодов времени и меньшую для какого-либо из остальных в другие периоды. Отсюда возникает необходимость уравнивания значений, которые, относясь к разным периодам времени, кажутся вначале неоднородными. Это именно тот вид процентов, основа понятия актуализации, который берет на себя роль «преобразователя».

В связи с изложенным могут быть сформулированы следующие положения:

1) любой аванс поступления имеет то же значение, что и получение основной прибыли.

2) операция по переносу платежа на последующий период оказывается выгодной.

Итак, требуется найти способ, позволяющий осуществить количественное сравнение между наборами капиталов (безразлично, платежей или поступлений), которое невозможно осуществить, базируясь только на здравом смысле. На рынке капиталов одна нынешняя денежная единица через год будет обмениваться на $1 + i_1$ единиц. Число i_1 является положительным, поскольку в противном случае общество предпочтет «нынешнюю денежную единицу» «денежной единице через год».

Вид процентов связан с экономическим понятием «эквивалентности» вследствие того, что в области инвестиций он позволяет констатировать эквивалентность между денежной массой, имеющейся в наличии сегодня, и денежной массой, которая будет в наличии через определенное количество лет. Так, M единиц сегодня будет эквивалентно $M + M \cdot i$ единиц через год, если вид процентов равен i. Основой коэффициента эквивалентности между двумя моментами будет отношение

$$\frac{M}{M+M \cdot i} .$$

В идеале преполагается, что размеры годового процента по годам $1, 2, \ldots, n$ известны и равны $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Часто принимается, что вид процентов одинаков в течение всех лет: $i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$. Тогда значение 1 денежной единицы через n лет будет равно $(1+i)^n$.

Очевидно, что определенное количество имеющихся сегодня в наличии денег не эквивалентно тому же самому количеству денег через n лет. Если размер процентов на рынке сегодня равен i_1, то 1 денежная единица будет заменена на $1 + i_1$ через один год; на $(1 + i_1)(1 + i_2)$ — через два года, и на $(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n)$ — через n лет. С помощью отношений пропорциональности получим, что 1 денежная единица через n лет будет эквивалентна

$$\frac{1}{(1+i_1)(1+i_2) \ldots (1+i_n)}$$

сегодняшним денежным единицам.

Одна из важнейших проблем, которые возникают при изучении инвестиций, — это выбор вида исчисляемого процента.

Введение единого вида исчисляемого процента формально требует, чтобы:

1) существовал совершенный рынок капитала;

2) вид исчисляемого процента соответствовал равновесию между предложением и спросом на капитал.

С предположением о едином виде исчисляемого процента трудно согласиться на практике, и соображения о его значении являются дискуссионными.

Простой анализ финансовой деятельности предприятий показывает, что последние прибегают к разнообразным источникам финансирования от государственного кредита с ограниченными видами процентов до чрезвычайных источников финансирования для того, чтобы отсутствие легко реализуемых банковских средств не привело к необратимым ситуациям.

Конечно, тема выбора вида процентов выходит за переделы экономического исследования, поскольку содержит правовые, этические и философские аспекты. Для концентрации внимания исключительно на микроэкономических явлениях все эти аспекты опускаются.

С формальной точки зрения исследования по определению вида процентов, а также функций, выполняемых ими в экономической системе, привели к возникновению так называемой «Теории капитала» в противовес «Теории распределения и цен». В работе «Positive Theory of Capital», опубликованной в 1889 году, Бем-Баверк формулирует три причины существования вида процентов.

1. Экономический субъект надеется оказаться в будущем в лучшем состоянии, чем сегодня, и это заставляет его придавать нынешним товарам большую значимость, чем будущим.

2. По целому ряду причин экономический субъект систематически недооценивает будущие потребности.

3. Длительные способы производства более плодотворны, чем краткие, и поэтому наличие товаров потребления сегодня позволяет иметь средства к существованию, пока не начнутся более длительные процессы производства.

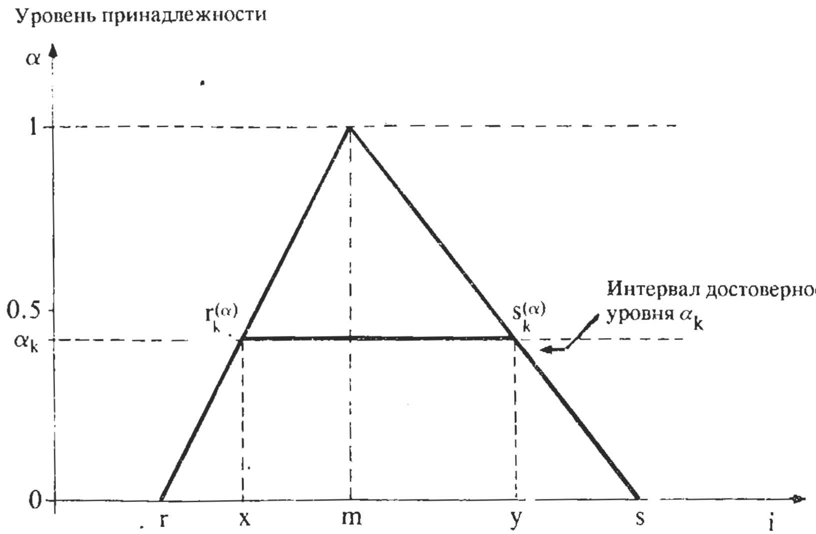
В этой области также важным оказалось опубликование в 1907 году книги Ирвинга Фишера «The Rate of Interest» со строгим методологическим подходом. Здесь среди других важных вопросов указывается, что вид процентов определяется взаимодействием двух факторов:

1) «своевременности инвестиций» (соотвествует третьей причине Бема-Баверка);

2) «временной предпочтительности» или нетерпеливости в расходах (соответствует второй причине Бема-Баверка).

Однако формальное установление вида процентов не обеспечивает возможности его использования при меняющейся действительности. Поэтому при осуществлении проекта инвестиций важно знать, как производить расчет вида процентов. Трудности, которые упоминались еще в классических исследованиях, приобретают в настоящее время особую важность из-за того, что существует не только большое разнообразие видов процентов на рынке в соответствии с моментом и предприятием, которое осуществляет инвестиции, но и из-за изменчивости последнего с течением времени. Если к этому добавить неопределенность, с которой планируется будущее, неудивительно, что приходится использовать виды нечетких процентов.

Для простоты изложения рассмотрим нечеткое треугольное число, полагая, что рассуждения окажутся справедливыми для любой другой формы нечеткого числа. На следующем рисунке представлен вид нечетких процентов i треугольной формы. «Уровень принадлежности» α нечеткого числа может варьироваться от 0 до 1.



Можно заметить, что при каждом уровне $0 \le \alpha_k \le 1$ появляется интервал достоверности $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$, который можно выразить как функцию от α_k в виде

$$[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}] = [r + (m - r)\,\alpha_k,\ s - (s - m)\,\alpha_k],$$

$$\alpha \in [0, 1].$$

Действительно, из подобия треугольников

$$\frac{m - r}{x - r} = \frac{1}{\alpha_k},$$

$$x = r + \alpha_k\ (m - r)$$

и

$$\frac{s - y}{s - m} = \frac{\alpha_k}{1},$$

$$y = s - \alpha_k\ (s - m).$$

Как известно, для интервалов достоверности можно осуществить следующие операции:

$$
\begin{aligned}
[a, b]\ (+)[c, d] &= [a + c,\ b + d], \\
[a, b]\ (\cdot)\ [c, d] &= [a \cdot c,\ b \cdot d], \\
&\quad a, b, c, d \in R^+, \\
[a, b]\ (:)\ [c, d] &= [a/d,\ b/c], \\
&\quad a, b, c, d \in R^+, \quad c > 0, \\
[1, 1]\ (:)\ [c, d] &= [1/d,\ 1/c], \\
&\quad c, d \in R^+, \quad c > 0.
\end{aligned}
$$

Это позволяет вычислить вид процента в нечеткой форме:

$$\frac{1}{1 + [r_k^{(\alpha)},\ s_k^{(\alpha)}]} = \frac{1}{[1 + r_k^{(\alpha)},\ 1 + s_k^{(\alpha)}]} = \left[\frac{1}{1 + s_k^{(\alpha)}},\ \frac{1}{1 + r_k^{(\alpha)}}\right].$$

Рассмотрение задачи оценки будущих видов процентов с помощью теории нечетких чисел позволило сделать важный шаг вперед.

4.3. Оптимизация выбора инвестиций с помощью нечетких множеств

Можно сказать, что решение о приобретении «объекта инвестиций» при постоянном и известном виде исчисляемого процента пригодно, если фактическое значение к моменту начала инвестиций неотрицательно. Это является предварительным условием при выборе решения из нескольких альтернатив, соответствующих нескольким объектам возможных инвестиций.

В предположении, что для объекта существуют $n + 1$ платежей A_0, a_1, …, a_n в моменты 0, 1, …, n и n поступлений $b_1,…,b_n$ в моменты 1, 2, …, n, инвестиция будет выгодной, если фактически полученное значение с учетом постоянного процента i будет большим или равным величине платежей, т. е. если

$$\sum_{j=1}^{n} b_j (1+i)^{-j} \geqslant A_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j (1+i)^{-j},$$

или, по-другому,

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)(1+i)^{-j} - A_0 \geqslant 0,$$

где V_n — фактическое значение суммарного дохода относительно момента 0. Разность $b_j - a_j$ можно обозначить через A_j, и тогда

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} A_j (1+i)^{-j} - A_0.$$

В условиях инвестиции A_j понимаются как разность между поступлениями и платежами и их суммирование с учетом возрастания объема денежной массы на заданный постоянный процент i по сути является фактической (актуализированной) прибылью. Метод актуализации дает возможность проводить сравнение серий капиталов (как поступлений, так и расходов), которые другими способами невозможно классифицировать из-за разницы в темпах истечения сроков. Этот метод ведет к «полному порядку» среди всех возможных серий капиталов.

Определив, что какой-либо объект инвестиций является выгодным с экономической точки зрения, следует перейти к сравнению его с другими объектами. При этом используется следующий критерий отбора: если предположить, что можно запрашивать и получать любую сумму денег при исчисляемом виде процентов, будет выгоднее выбрать такую инвестицию, актуализированное значение прибыли при которой будет большим.

Эти условия для объектов A и B могут быть записаны следующим образом:

если $V_n^A - V_n^B > 0$, то подходит A,

если $V_n^A - V_n^B < 0$, то подходит B.

Если учитывается переменный, но заранее известный вид процентов, актуализированное значение прибыли принимает вид

$$V_n = -A_0 + \frac{A_1}{(1+i_1)} + \frac{A_2}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)} .$$

Если же вопросы инвестиций рассматриваются с учетом неопределенности, то вид процентов не только варьируется со временем, но и принимает нечеткую форму. Поэтому тогда возможно использовать нечеткую актуализацию и предыдущее выражение для определенного «уровня принадлежности» может быть записано в виде

$$V_n^{(\alpha)} = -A_0 \,(+)\, \frac{A_1}{1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}]} \,(+)\, \frac{A_2}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}])} \,(+)$$

$$(+)\, \frac{A_3}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_3^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)}])} \,(+) \ldots.\, (+)$$

$$(+)\, \frac{A_n}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}]) \ldots (1+[r_n^{(\alpha)}, s_n^{(\alpha)}])} .$$

С учетом ранее полученной формулы

$$\frac{1}{1+[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]} = \left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]$$

будем иметь

$$V_n^{(\alpha)} = -A_0 \,(+)\, A_1 \left[\frac{1}{1+s_1^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_1^{(\alpha)}}\right] (+)$$

$$(+)\, A_2 \left[\frac{\cdot 1}{(1+s_1^{(\alpha)})\cdot(1+s_2^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})\cdot(1+r_2^{(\alpha)})}\right] (+)$$

$$(+) \ldots$$

$$(+)\, A_n \left[\frac{1}{(1+s_1^{(\alpha)})\cdot(1+s_2^{(\alpha)})\ldots(1+s_n^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})\cdot(1+r_2^{(\alpha)})\ldots(1+r_n^{(\alpha)})}\right] .$$

Это выражение для каждого уровня α позволяет найти диапазон возможностей, между которыми находится,как мы надеемся, реальный результат. Кроме того, варьируя уровнем принадлежности и заданным порогом (детерминированным или нечетким), удается определить, при каком уровне α можно будет обеспечить выбор A_j при $j = 0, 1, 2 \ldots n$, и предположения относительно интервалов $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$.

Проиллюстрируем предыдущее изложение числовым примером.

При возможности инвестиций в объект, срок жизни которого оценивается в 3 года, т.е. $t = 0, 1, 2, 3$, можно предположить, что виды процентов для этого экономического объекта нечетки и выражены (в процентах) следующими треугольными числами :

год 1: $(r_1, m_1, s_1)=(8,10,13)$,

год 2: $(r_2, m_2, s_2)=(9,12,15)$,

год 3: $(r_3, m_3, s_3)=(7,10,12)$.

С другой стороны, если A_0=7000, A_1 = 5000, A_2 = 4000, A_3 = 2000 денежных единиц, то можно вычислить $V_n^{(\alpha)}$ последовательно для 11 значений уровня α: $\alpha = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$. Для этого по известной формуле определяются интервалы достоверности (в процентах) для каждого уровня :

$$[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}] = [8 + 2\alpha, 13—3\alpha,],$$

$$[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}] = [9 + 3\alpha, 15—3\alpha,],$$

$$[r_3^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)}] = [7 + 3\alpha, 12—2\alpha,].$$

Исходя из этих данных, расчитывается $V_3^{(\alpha)}$ по формуле .

$$V_3^{(\alpha)} = —7.000\ (+)\ 5.000 \cdot \left[\frac{100}{100 + 13—3\alpha}, \frac{100}{100 + 8 + 2\alpha}\right] +$$

$$+ 4.000 \cdot \left[\frac{100}{100 + 13—3\alpha}\ \frac{100}{100 + 15—3\alpha}, \frac{100}{100 + 8 + 2\alpha}\ \frac{100}{100 + 9 + 3\alpha}\right] +$$

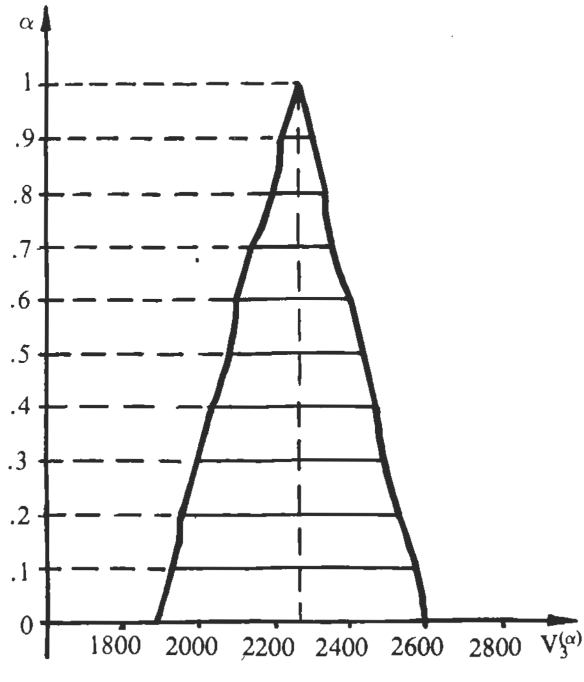
$$+ 2.000 \cdot \left[\frac{100}{100 + 13—3\alpha}\ \frac{100}{100 + 15—3\alpha}\ \frac{100}{100 + 12—2\alpha},\right.$$

$$\left.\frac{100}{100 + 8 + 2\alpha}\ \frac{100}{100 + 9 + 3\alpha}\ \frac{100}{100 + 7 + 3\alpha}\right].$$

Для различных уровней α будем иметь :

α	$V_3^{(\alpha)}$
0	[1875.9, 2614.5]
0.1	[1914.1, 2578.8]
0.2	[1951.2, 2542.9]
0.3	[1990.0, 2507.8]
0.4	[2028.8, 2472.3]
0.5	[2067.4, 2437.4]
0.6	[2106.2, 2403.1]
0.7	[2146.9, 2368.2]
0.8	[2185.7, 2334.4]
0.9	[2226.6, 2300.3]
1	[2266.2, 2266.2]

Эти результаты могут быть отражены на следующем графике:



Можно заметить из графика, что результирующая кривая не является в целом треугольной, хотя и приближается к ней.

Изложенные выше упрощенные рассуждения для нечетких процентов треугольной формы можно без особых трудностей провести для произвольных нечетких чисел. Указанная схема легко может комбинироваться с методом нечеткого начального базисного бюджета при наличии финансовых ограничений (детерминированных или нечетких), которые определяются общими условиями на предприятии.

Таким образом, если предвидение среднесрочных и долгосрочных последствий инвестиций на предприятия затруднено или вообще невозможно, то предположение о нечеткости видов процентов оказывается результативным.

ГЛАВА 5. ЭКОНОМИЧНАЯ ЗАМЕНА ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

5.1. Предприятие и потребности обновления

Для того чтобы промышленность могла осуществлять функцию производства, она должна воспользоваться средствами или факторами производства, среди которых выделяется оборудование. С точки зрения управления предприятиями одно из наиболее важных качеств оборудования — это необходимость его включения в постоянную балансовую структуру.

Однако постоянное развитие производственных ситуаций приводит к тому, что понятие стабильности может рассматриваться как относительное при тех изменениях, которые происходят в намерениях предпринимателя.

В настоящее время предприниматели чувствуют растущую потребность в методах, которые позволяли бы определять наилучший момент, когда действующее оборудование должно быть заменено другим. В работах по микроэкономике исследователи часто подчеркивают необходимость комбинировать факторы производства таким образом, чтобы достичь минимизации затрат для получения определенного количества продукции в единицу времени. Это требует анализа состояния промышленного оборудования. Экономический аспект подобного анализа в управлении предприятием обычно называется «экономичная замена промышленного оборудования». Действительно, функционирующее оборудование теряет свое функционально-экономическое значение, если появляется новое, способное производить при меньших затратах.

Задача замены промышленного оборудования может ставиться в двух аспектах. Первый касается получения оптимальной цепочки замен, т.е. наилучшей программы от начального до конечного момента, который специалисты называют «экономическим горизонтом». Второй заключается в подходе к замене с точки зрения определения того момента в будущем, когда оборудование должно быть заменено по экономическим критериям. Эта дата будет определяться моментом, когда функциональность оборудования исчерпает себя.

В любом случае замена оборудования влечет большие затраты, поэтому проблема замены оборудования для предпринимателя представляет особый интерес. На эти затраты, конечно, влияет срок службы оборудования и, вследствие этого, момент обновления. Отсюда появилась и известная классификация предприятий, в которой в качестве основы выбран срок службы действующего оборудования. Так, можно рассматривать определенные предприятия, имеющие оборудование со средним сроком службы, сравнивая их с теми, чье оборудование служит мало, и с теми, чье оборудование старо. Очевидно, эксплуатационные издержки на этих предприятиях будут различными, особенно при наличии такого важного для экономической системы фактора как технический прогресс.

Принимая решение о замене, предприниматель определенным образом воздействует на экономическое состояние своего предприятия. Хотя возможно, что в оптимальный момент замены не будет больших расхождений в затратах, но по мере того, как решение об обновлении удаляется от оптимального момента, рост затрат может значительно ускориться. Таким образом, систематическое воздействие может привести к получению удовлетворительных как краткосрочных, так и долгосрочных результатов.

В какие-то моменты на предприятии осознается целесообразность замены оборудования. Структура общей задачи «замена оборудования» может быть описана с учетом двух аспектов:

1) причин замены;

2) методов оптимального подхода к замене.

Среди причин обновления выделяются два основных определяющих фактора: экономическая и функциональная устарелость. Обычно промышленное оборудование подвергается обслуживанию, ремонту и модификациям, удлиняющим срок службы. Явление экономической устарелости влечет необходимость не только приобретения нового оборудования, сходного со старым по своим характеристикам, но и другого, способного осуществлять те же функции с лучшими показателями. Если физический износ и неполадки ведут к функциональной устарелости, то явление экономической устарелости проявляется главным образом при следующих обстоятельствах:

1) появление на рынке технологических изменений, с помощью которых можно достичь увеличения рентабельности. Быстрый прогресс в определенных областях техники приводит к любопытному явлению: существует надежда на новое оборудование, которое вот-вот появится. Это парадоксальным образом приводит к пассивности. Очень часто ожидается, что появление технологических новинок приведет к появлению на рынке нового более производительного оборудования и/или позволит получить товары более высокого качества. Предполагается, что при этом произойдет снижение затрат и/или увеличение доходов. При этом увеличение доходов может последовать как от увеличения объемов сбыта, так и от более высоких цен на продукцию более высокого качества;

2) удорожание какого-либо фактора производства может сделать эффективным использование оборудования. Это предположение касается, например, удорожания рабочей силы, типичного для 60-х годов и удорожания электроэнергии, которое началось с 1973 года;

3) реорганизация предприятия, новые процессы на котором могут привести к замене существующего оборудования на иное.

Каким бы ни был характер старения оборудования, возникает необходимость в осмыслении ситуации и решении вопроса, приступать ли к замене или нет. В экономических исследованиях по этой проблеме особое внимание уделялось промышленному оборудованию, поскольку затраты как на получение продукции, так и на ее качество зависят от «степени капитализации» и от «состояния функционирования или использования» этого оборудования.

Для того чтобы принять решение о замене, необходимо предварительное изучение, которое в современной экономической науке начинает выделяться из области непосредственного выбора инвестиций. Анализ экономических методов, необходимых для подхода к проблеме замены, приводит к необходимости введения рассмотрения временного параметра как для оценки жизненного цикла объекта обновления, так и для формального осуществления статистических исследований (сравнительной статистики) в динамике. Новые методы выбора решений могут оказать существенную помощь для решения этой проблемы как составной части управления предприятием.

Существует несколько важных ступеней в эволюции исследований, касающихся замены оборудования. Здесь имеется в виду использование разных типов моделей:

1) детерминированной экономики;
2) вероятностных моделей;
3) с учетом неопределенностей.

В настоящее время некоторые из этих путей закрыты вследствие того, что предприятия не располагают необходимыми данными для их использования. С другой стороны, не всегда могут быть приняты наиболее современные модели из-за чрезвычайно сложных исследований для осуществления длительного систематического сравнения относительно того момента, когда следует приступить к замене.

5.2. Вероятностный подход к задаче замены оборудования

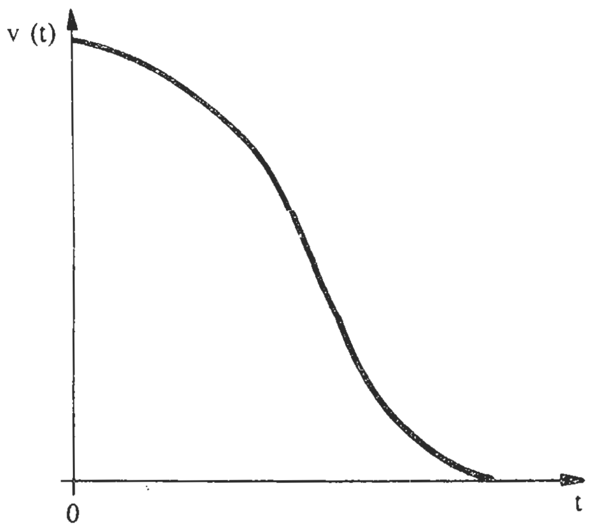
Традиционно при планировании принимались в расчет общие предположения, очень часто основанные на аналогии, прецеденте и экстраполяции. Формализация таких предположений привела к использованию понятия вероятности, что поставило вопрос о применимости вероятностей в области предпринимательства. Действительно, при таком подходе известны трудности, связанные с необходимостью или знать о благоприятных исходах для всевозможных случаев, или считать, что все случаи в равной степени возможны, или располагать серией наблюдений о повторяющихся явлениях. Несмотря на указанные трудности, вероятностные расчеты широко применяются в теории замены промышленного оборудования. Внедрение методов современной математической статистики в управление производством дало хорошие результаты, открыло новые подходы к старым проблемам и расширило круг решаемых предпринимательских задач.

Но отсутствие накопленных данных и неопределенность при описании будущего уменьшает уверенность в правомерности использования вероятностей. Это наряду с разработкой новых перспектив в области исследования неопределенности дало новую направленность научной деятельности. Появились работы, основанные на теории нечетких множеств, которые успешно использованы в различных прикладных областях. Это относится и к задачам замены оборудования. Действительно, одна из наиболее серьезных трудностей в использовании вероятностных моделей исходит из необходимости располагать данными, которые большинство предприятий не может получить. К ним относятся: знание всех возможных событий, а также отношений между ними; вероятность «выживания», т.е. вероятность того, что оборудование сможет функционировать по истечении определенного срока службы; условная вероятность поломки; вероятность того, что оборудование по истечении определенного безаварийного срока службы откажет на следующий год.

Так называемый «закон выживания» оборудования представляется в виде кривой, которая может быть построена при наличии достаточного количества идентичных случаев с известным сроком службы. Для этого достаточно определить в каждый момент t количество работающего оборудования. Предположив, что функция n(t) непрерывна, получаем кривую, которая для каждого момента даст возможность определить количество пригодного оборудования и которая, будучи выраженной в относительных терминах, дает «кривую выживания»

$$\frac{n(t)}{n(0)} = v(t),$$

в которой приближенно отражается вероятность выживания оборудования в каждый момент. Кривая выживания обычно представляется следующим образом:



С другой стороны, вероятность того, что оборудование выйдет из строя между моментами t—1 и t, будет вычисляться по формуле

$$\frac{n\ (t-1)-n\ (t)}{n\ (0)} = \frac{n\ (t-1)}{n\ (0)} - \frac{n\ (t)}{n\ (0)} = v\ (t-1)-v\ (t)\ .$$

Таким образом, можно сделать вывод, что вероятность выхода оборудования из строя между моментами t и t + Δt будет v(t)—v(t + Δt). Но если предположить, что Δt стремится к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{v\ (t)-v\ (t+\Delta t)}{\Delta t} = -v'\ (t)\ ,$$

и, значит, $-v'(t) \cdot \Delta t = v(t)-v(t+\Delta t)$ будет вероятностью того, что оборудование заменено между t и t + Δt при Δt → 0.

Условная вероятность поломки определенного оборудования в момент t, величина $p_c(t)$, понимается как вероятность того, что оборудование, дойдя в работающем состоянии до t—1, выйдет из строя между t—1 и t. Тогда вероятность p(t) поломки оборудования между t—1 и t вычисляется как произведение вероятности v(t—1) того, что оборудование доработало до t – 1, и условной вероятности $p_c(t)$ поломки.

Таким образом,

$$p(t) = v(t-1) \cdot p_c(t),$$

откуда

$$p_c(t) = \frac{p(t)}{v(t-1)}\ .$$

Логично полагать, что каждому типу оборудования будет соответствовать своя кривая выживания и, зная ее форму, можно будет определить, какой вид оборудования она представляет.

Чем больше форма кривой выживания приближается к убывающей экспоненте, тем больше вероятность поломки стремится к константе. Действительно, возьмем функцию выживания в виде непрерывной экспоненты

$$v(t) = e^{-K \cdot t}.$$

Как уже отмечалось, вероятность замены оборудования между t и t+ Δt при t → 0 равна

$$-v'(t) \cdot \Delta t.$$

Если обозначить через $\lambda(t)$ условную вероятность поломки между t и $t+$ $+\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, то можно записать

$$-v'(t) \cdot \Delta t = v(t) \cdot \lambda(t) \cdot \Delta t.$$

Поскольку вероятность замены между t и $t+\Delta t$ будет равна вероятности выживания в t из-за условной вероятности поломки между t и $t+\Delta t$, получим

$$\lambda(\tau) = -\frac{v'(t)}{v(t)} .$$

Учитывая экспоненциальность $v(t)$, находим

$$\lambda(t) = -\frac{-K e^{-Kt}}{e^{-Kt}} = K .$$

Такой подход можно перенести в область неопределенности с помощью теории нечетких множеств. Для этого можно предположить, что срок T службы объекта инвестиций — нечеткое число, т.е. нормальное и выпуклое нечеткое множество, в котором функция принадлежности $\mu_A(t)$ принимает значение из $[0, 1]$ и $\underset{\sim}{A} \subset R^+$. Считается, кроме того, что $\mu_A(0) = 0$, т.е. функция принадлежности равна нулю в начальный момент 0.

5.3. Замена оборудования при неопределенности

Можно считать, что нечеткое число $\underset{\sim}{A}$ представляет собой «закон возможности» и означает возможность поломки в момент t.

Пусть $\pi(t) = \mu_A(t)$.

Если θ — первый момент времени, в который $\pi(t) = 1$, причем $\underset{\sim}{A}$ не обязательно должно быть унимодальным (без локальных оптимумов) и может иметь одно основание, то можно рассматривать зависимость, которая представляет возможность того, что оборудование E будет иметь поломку в интервале $[0, t]$. Эту зависимость можно записать в виде *

$$\varphi(t) = \begin{cases} \bigvee\limits_{r=0}^{t} \pi(t), & t < \theta, \\ 1, & t \geq \theta. \end{cases}$$

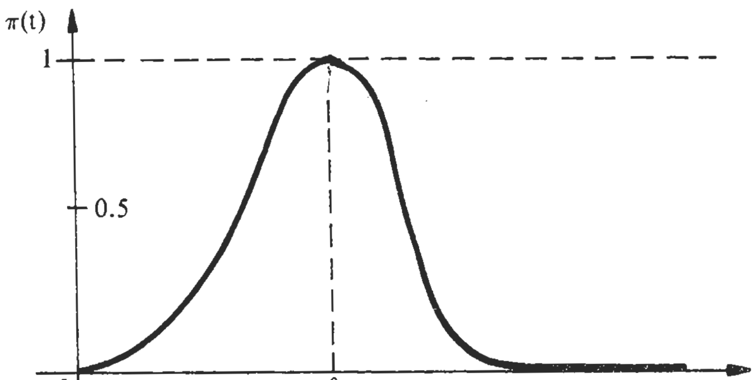
Другими словами, $\varphi(t) = \pi(t)$ до момента θ и $\varphi(t) = 1$ для больших значений.

На этой основе можно дать определение другой зависимости, которая представляет «возможность того, что E будет находиться в работающем состояниии в момент t»:

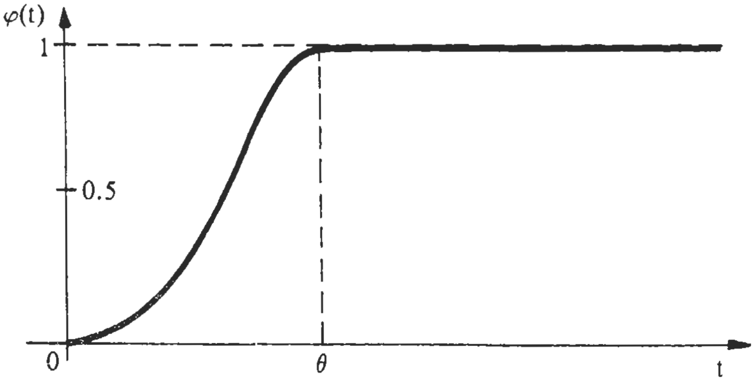
$$K(t) = 1 - \varphi(t).$$

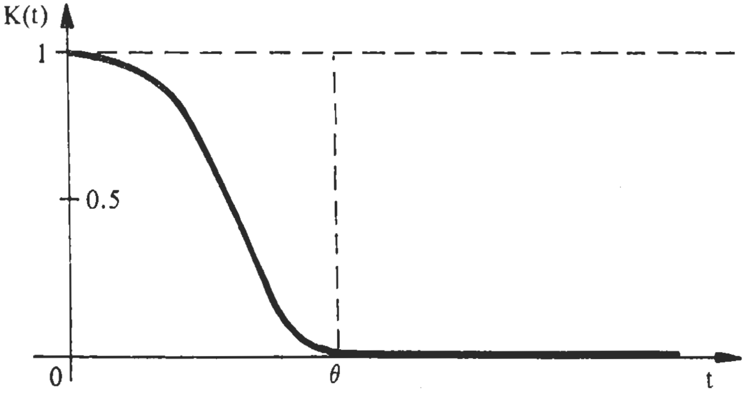
Функция $K(t)$ играет здесь ту же роль, что и «кривая выживания» в теории вероятностей,и поэтому оставлено ее обозначение.

Все три зависимости графически представляются следующим образом:



* Символом «∧» будем обозначать выбор самого малого значения, а символом «∨» — самого большого.





Отметим, что фукнция $\varphi(t)$ не равна функции $K(t)$ с измененным знаком. Также нельзя определить эквивалент для $\lambda(t) = -\dfrac{v'(t)}{v(t)}$ при вероятностном подходе, но можно определить некоторый аналог этому значению. Можно задать «условную возможность» того, что оборудование E, дойдя до момента a, будет продолжать функционировать еще какое-то время t после a, т.е. не выйдет из строя в интервале $[0, a+t]$. Запишем :

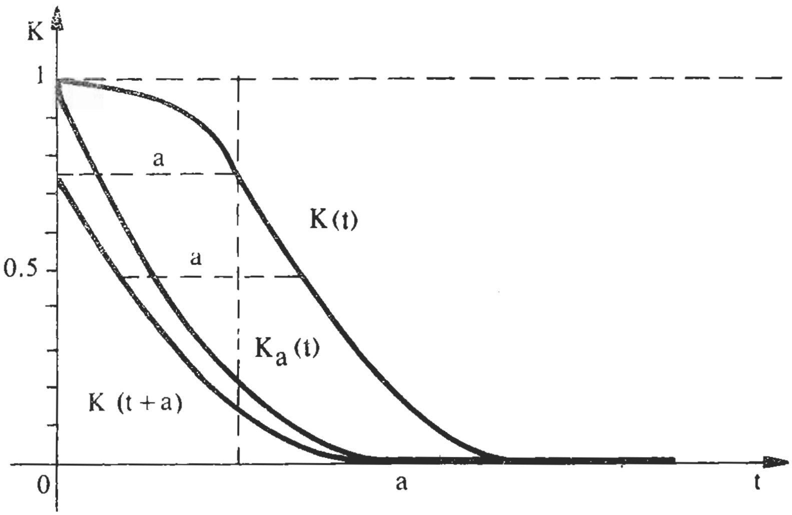
$$K(t+a) = K(a) \cdot K_a(t),$$

где $K(t+a)$ не является законом возможности, поскольку $K(a) < 1$, если $a > 0$. Из предыдущей формулы получим

$$K_a(t) = \frac{K(t+a)}{K(a)} \quad .$$

Это выражение соответствует закону выживания оборудования, которое работает без поломок до момента a, и, возможно, далее до момента $a+t$. Если t стремится к 0, то $K(a)$ можно понимать как «вид поломки» несколько в другом смысле, чем для величины $\lambda(t)$ при вероятностном подходе.

На следующем графике видно, как может быть построено $K_a(t)$:



Можно заметить для данного a, что если функция $K(t)$ имеет форму колокола, то для $K_a(t)$ получаем кривую экспоненциальной формы.

Проиллюстрируем вышеизложенное некоторыми примерами.

Так, если

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi(t)$:	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0

,

то получим

	0	1	2	3	4	5	6
$\varphi(t)$:	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1

,

K(t):

0	1	2	3	4	5	6
1	0.9	0.8	0.5	0.2	0	0

,

$K_a(t)$: $a = 2$

0	1	2	3	4
1	0.625	0.25	0	0

.

Другой пример с применением нормализованного закона Пуассона для получения закона возможности *:

$$\pi(t) = \begin{cases} 0\,, & t = 0\,, \\ \dfrac{b\,!}{t\,!} \cdot b^{\,t-b}\,, & t \in N_0^{+},\ b \in N\,, \end{cases}$$

$$K(t) = \begin{cases} 1\,, & t = 0\,, \\ 1 - \dfrac{b\,!}{t\,!} \cdot b^{\,t-b}, & t = 1, 2, \ldots, b-1;\ b \in N\,, \\ 0\,, & t = b-1, b, b+1, \ldots \end{cases}$$

При b = 5 получим

$\pi(t) =$

0	1	2	3	4	5	6
0	0.192	0.480	0.800	1	1	0.833

7	8	9	10	11	12	13
0.595	0.372	0.206	0.103	0.047	0.019	0.007

14	$\geqslant 15$
0.002	0

,

* N — множество натуральных чисел, No — множество натуральных чисел без нуля. *(Прим.ред.перевода.)*

	0	1	2	3	4	5
$\varphi(t) =$	0	0.192	0.480	0.800	1	1

,

	0	1	2	3	4	5
$K(t) =$	1	0.808	0.520	0.200	0	0

,

	0	1	2	3	4
$K_1(t) =$	1	0.643	0.247	0	0

.

Наконец рассмотрим пример с нечетким треугольным числом из R^+:

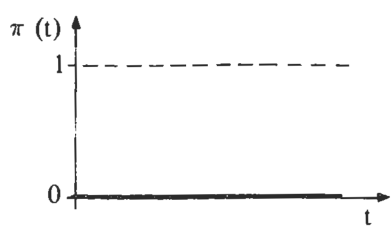
$$\pi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{b}, & 0 \le t < b, \\ 2 - \dfrac{t}{b}, & b \le t < 2b, \\ 0, & t \ge 2b, \end{cases}$$

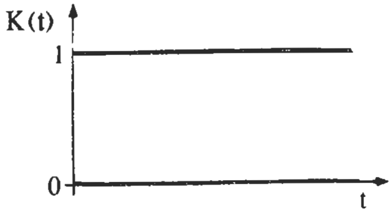
$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{b}, & 0 \le t < b, \\ 1, & t \ge b, \end{cases}$$

$$K(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{b}, & 0 \le t < b, \\ 0, & t \ge b. \end{cases}$$

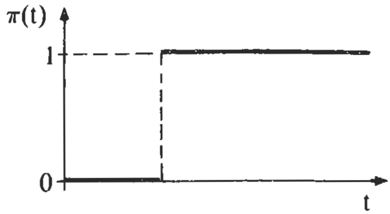
Ниже на графиках отражены интересные проявления некоторых специфических законов возможности при различных режимах замены оборудования.

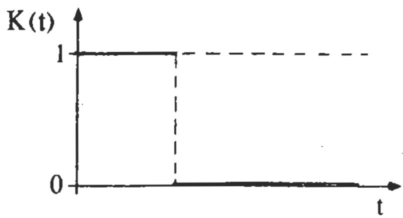
1. Оборудование функционирует бесконечно долго (неосуществимо на практике):



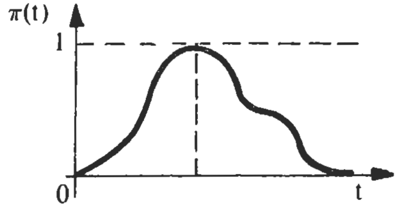


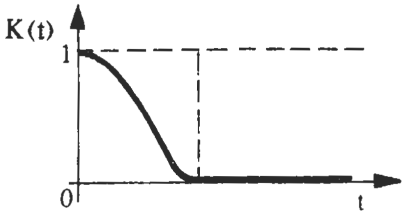
2. Оборудование заменяется в назначенное время (идеальная ситуация):



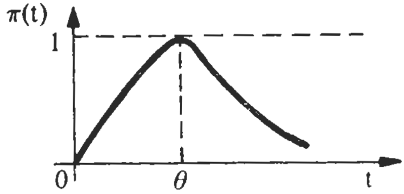


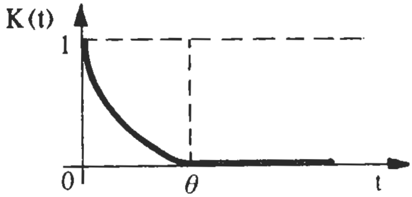
3. Оборудование заменяется в неопределенный момент времени



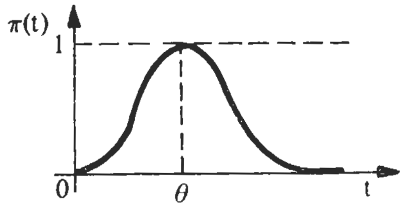


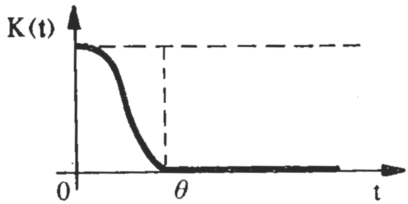
4. Закон выживания K(t) имеет экспоненциальный вид (возникает обычно при «усталости» оборудования):





5. Закон выживания K(t) имеет форму колокола (обычно возникает при «физическом износе» оборудования):





Еще одним важным элементом в исследовании задачи обновления оборудования является так называемый «закон вероятности потребления».

Можно исходить из предположения, что новое оборудование включается в совокупность оборудования, которое заменяется в момент завершения срока службы. Требуется определить вероятность $P_m(t)$ того, что в промежутке времени от 0 до t призошла замена этого вида оборудования на другое, точно такое же (гипотеза устойчивой экономической системы). Количество оборудования, поставленного за этот промежуток времени, называется «потреблением». Вероятность нулевого потребления (с количеством замен $m = 0$)

$$P_0(t) = K(t).$$

Для расчета $P_1(t)$ предположим, что в промежутке от *0* до *u* произошла ровно одна замена и ни одной — в промежутке от *u* до *t*. Тогда для всех рассматриваемых моментов *u* получим

$$P_1(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K(t-u)).$$

Обобщая, можно сказать, что $P_m(t)$ можно выразить через $\pi(t)$ и $P_{m-1}(t)$. Действительно, для того чтобы существовало «потребление» m оборудования от *0* до *t*, достаточно, чтобы произошла одна замена между *0* и *u*, и $m-1$ замен между *u* и t (или наоборот: сначала $m-1$ замен и затем одна). Тогда получим

$$P_m(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_{m-1}(t-u)) =$$
$$= \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(t-u) \wedge P_{m-1}(u)).$$

В итоге имеем рекуррентные формулы:

$$P_1(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K(t-u)),$$
$$P_2(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_1(t-u)),$$
$$P_3(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_2(t-u)),$$

$$P_m(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_{m-1}(t-u)).$$

Рассмотрим пример. Пусть

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9	
$\pi(t)$:	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0	,

	0	1	2	3	4	5	6	
$K(t)$:	1	0.9	0.8	0.5	0.2	0	0	.

Вычислим:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9	
$P_1(t)$ =	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0	(+)

	0	1	2	3	4	5	
(+)	1	0.9	0.8	0.5	0.2	0	=

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
=	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5

11	12	≥13	
0.2	0.1	0	,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$P_2(t)$ =	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0	(+)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(+)	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.9	0.8	0.7	0.6

10	11	12	≥13	
0.5	0.2	0.1	0	=

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.5	0.5	0.8	0.8	1	0.9

12	13	14	15	16	17	18	19	20	⩾21
0.8	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.2	0.1	0.1	0

и т. д.

Приведем другой пример, используя в R^+ те же функции $\pi(t)$ и $K(t)$, что и в предыдущем примере.

Тогда получим

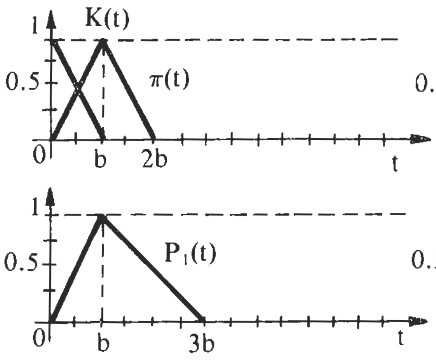
$$P_1(t)=\begin{cases} \bigvee\limits_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K(t-u)) = \dfrac{t}{b}, & 0 \le t < b, \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{t}{2b}, & b \le t < 3b, \\ 0, & t \ge 3b, \end{cases}$$

$$P_2(t)=\begin{cases} \bigvee\limits_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_1(t-u)) = \dfrac{t}{2b}, & 0 \le t < 2b, \\ \dfrac{5}{3} - \dfrac{t}{3b}, & 2b \le t < 5b, \\ 0, & t \ge 5b, \end{cases}$$

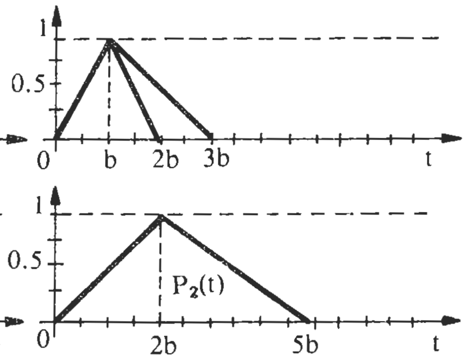
$$P_3(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{3b}, & 0 \le t < 3b, \\ \dfrac{7}{4} - \dfrac{t}{4b}, & 3b \le t < 7b, \\ 0, & t \ge 7b, \end{cases}$$

$$P_4(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{4b}, & 0 \le t < 4b, \\ \dfrac{9}{5} - \dfrac{t}{5b}, & 4b \le t < 9b, \\ 0, & t \ge 9b, \end{cases}$$

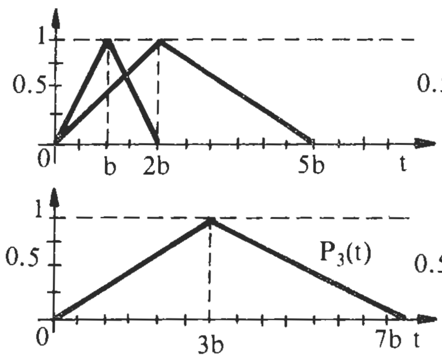
и т. д. Графически эти результаты могут быть выражены следующим образом:



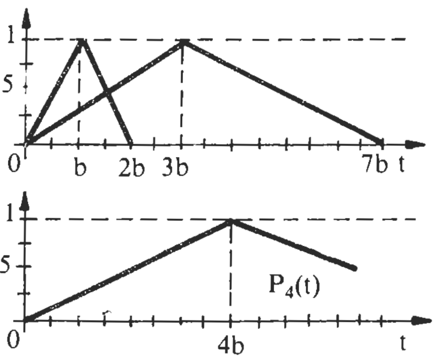
Расчет $P_1(t)$



Расчет $P_2(t)$



Расчет $P_3(t)$



Расчет $P_4(t)$

Видно, что

$$\underset{\sim}{P}_1(t) = (0, 0, b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, b, 3b)\ ,$$

$$\underset{\sim}{P}_2(t) = (0, b, 3b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, 2b, 5b)\ ,$$

$$\underset{\sim}{P}_3(t) = (0, 2b, 5b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, 3b, 7b)\ ,$$

. . . .

$$\underset{\sim}{P}_m(t) = (0, (m-1)b, (2m-1)b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, mb, (2m+1)b)\ .$$

Исследуем теперь задачу замены, предполагая, что имеется сеть агрегатов и возможность изъятия каждого агрегата E_i определяется нечетким числом $\underset{\sim}{A}_i$, т.е. закон $\pi_i(t)$ имеет вид $\pi_i(t) = \mu_{A_i}(t)$.

Для простоты считаем, что сеть состоит из двух агрегатов и она функционирует только тогда, когда оба агрегата E_1 и E_2 функционируют одновременно и выход из строя одного из них приводит к остановке всей системы. Можно сказать, что агрегаты функционируют «в линии», и записать:

$$\underset{\sim}{A}_s = \underset{\sim}{A}_1\ (\wedge)\ \underset{\sim}{A}_2\ ,$$

а также

$$\pi_s(t) = \pi_1(t) \wedge \pi_2(t).$$

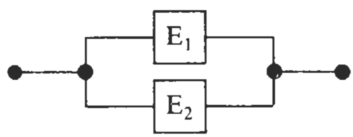
Альтернативной ситуацией по отношению к предыдущей будет та, в которой система функционирует, если работает хотя бы один агрегат. В таком случае можно сказать, что агрегаты работают «в параллели». Тогда запишем:

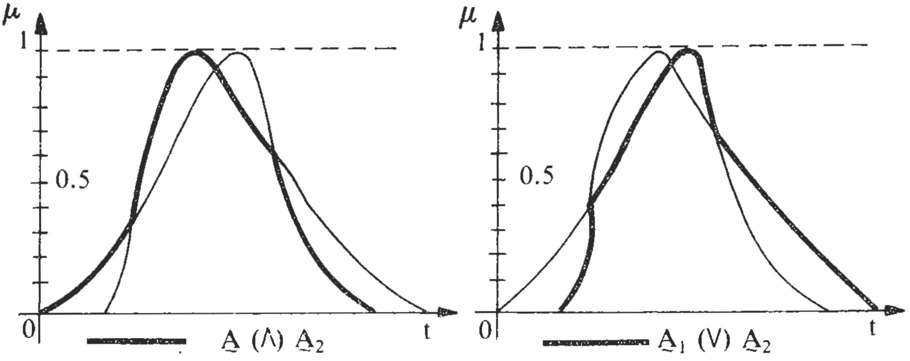
$$\underset{\sim}{A}_p = \underset{\sim}{A}_1\ (\vee)\ \underset{\sim}{A}_2\ ,$$

а также

$$\pi_p(t) = \pi_1(t) \vee \pi_2(t).$$

Таким образом, последовательное соединение соответствует минимуму двух нечетких чисел, а параллельное соединение — максимуму. Изобразим это графически :





Исходя из этих типичных видов соединений, можно представить параллельно-последовательное и последовательно-параллельное соединения, соответствующие всем логическим условиям функционирования, построенными с помощью операторов ($\vee$) и ($\wedge$).

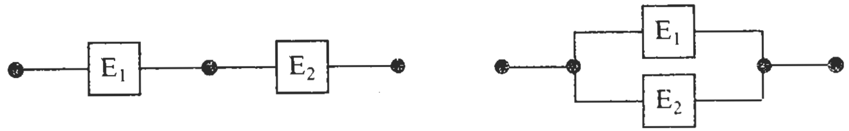
Кроме логических условий, связанных с ($\wedge$) и ($\vee$), можно также в задачах замены оборудования ввести оператор (+), рассматривая ситуации, которые часто происходят в действительности. Также можно оценивать срок службы системы, используя функции выживания при тех же операторах ($\wedge$)и ($\vee$).

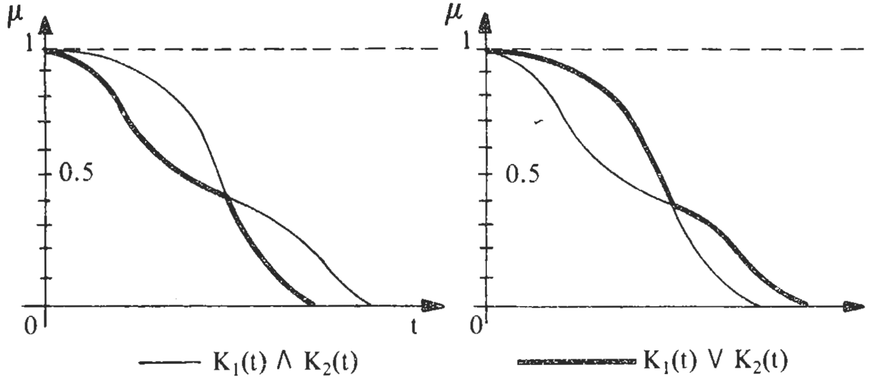
В этом случае будем иметь:

$K_s(t) = K_1(t) \wedge K_2(t)$для соединения в линию,

$K_p(t) = K_1(t) \vee K_2(t)$для соединения в параллель.

Графически получим соответственно:





Нужно отметить, что обычные формулы свертки maxmin могут быть использованы как для чисел $\underset{\sim}{A}$, так и для кривых выживания K(t). Тогда

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (\wedge) \underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t = u \wedge v} (\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v)),$$

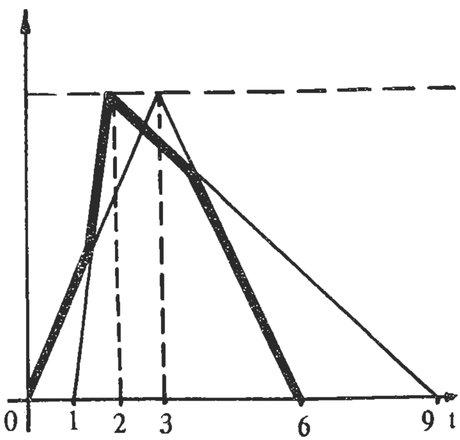
$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (\vee) \underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t = u \vee v} (\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v)),$$

$$\mu_{K_1(t) \wedge K_2(t)}(t) = \bigvee_{t = u \wedge v} (\mu_{K_1(t)}(u) \wedge \mu_{K_2(t)}(v)),$$

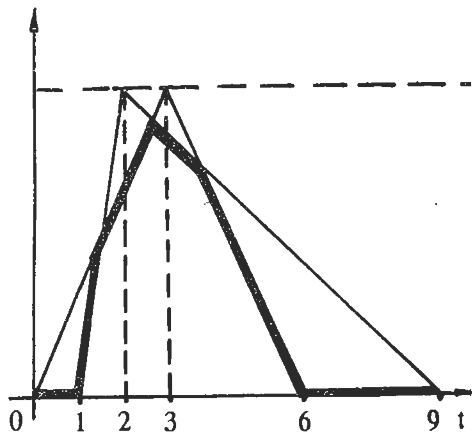
$$\mu_{K_1(t) \vee K_2(t)}(t) = \bigvee_{t = u \vee v} (\mu_{K_1(t)}(u) \wedge \mu_{K_2(t)}(v)),$$

Нельзя смешивать оператор ($\wedge$) с пересечением $\cap$, а также ($\vee$) с объединением $\cup$.

Рассмотрим пример:



$A_1^{(\alpha)} \, (\wedge) \, A_2^{(\alpha)}$



$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cap \mu_{\pi_2(t)}(t)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_1(t)$:	0	1/3	2/3	1	2/3	1/3	0	0	0

,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi_2(t)$:	0	1	6/7	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0

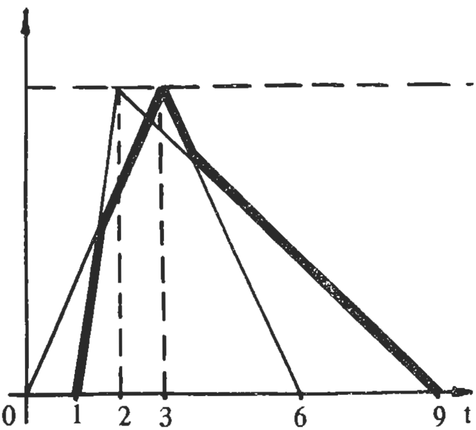
,

$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cap \mu_{\pi_2(t)}(t)$:

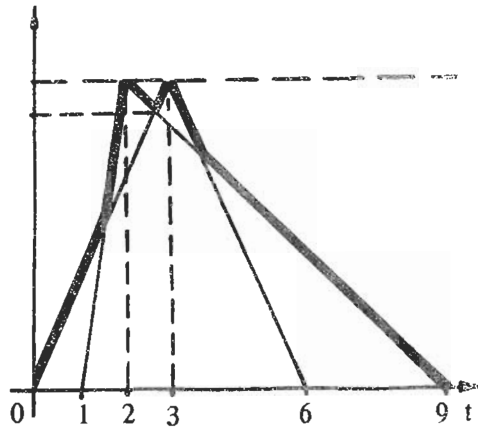
1	2	3	4	5	6
0	2/3	6/7	2/3	1/3	0

,

не является нечетким числом.



$A_1^{(\alpha)} (\vee) A_2^{(\alpha)}$



$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cup \mu_{\pi_2(t)}(t)$

$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cup \mu_{\pi_2(t)}(t)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1/3	1	1	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0

не является нечетким числом.

Вернемся теперь к

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (\wedge) \underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t = u \wedge v} (\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v))$$

из предыдущего примера:

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(0) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(0) = 0$ (комбинации, где $t = 0$, всегда равны нулю),

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(1) = 0$ $\qquad$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(1) = 0$

Большим из этих чисел будет 1/3.

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1/3$

Большим из этих чисел будет 1.

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 6/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 5/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 1/3$

Большим из этих чисел будет 6/7.

Можно осуществить все расчеты для значений $0 \le \alpha \le 1$, уровень за уровнем. Тогда при $\alpha \in [0,1]$:

$A_{1\alpha} = [a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}]$, $\quad A_{2\alpha} = [a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$

$A_{\alpha_s} = [a_1^{(\alpha)} \wedge a_2^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)} \wedge b_2^{(\alpha)}] = [a_s^{(\alpha)}, b_s^{(\alpha)}]$

$A_{\alpha_p} = [a_1^{(\alpha)} \vee a_2^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)} \vee b_2^{(\alpha)}] = [a_p^{(\alpha)}, b_p^{(\alpha)}]$

Если $\underset{\sim}{A}_1 = (0,3,6)$, $\quad \underset{\sim}{A}_2 = (1,2,9)$,

$A_1^{(\alpha)} = [3\alpha, 6-3\alpha]$, $A_2^{(\alpha)} = [\alpha+1, 9-7\alpha]$,

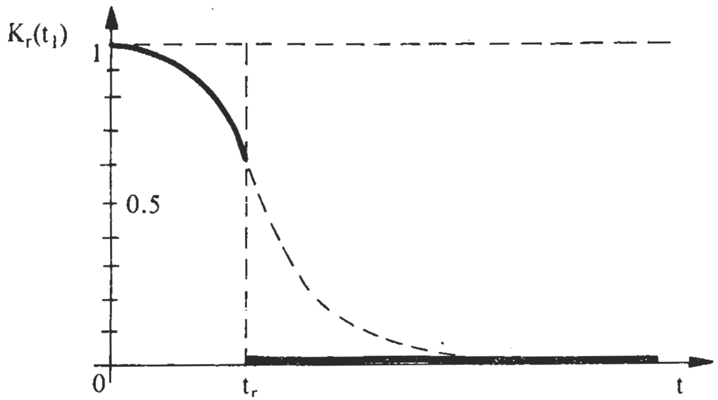
то получим:

α	3α	$\alpha + 1$	$(3\alpha) \wedge (\alpha+1)$	$(3\alpha) \vee (\alpha+1)$
0	0	1	0	1
.1	0.3	1.1	0.3	1.1
.2	0.6	1.2	0.6	1.2
.3	0.9	1.3	0.9	1.3
.4	1.2	1.4	1.2	1.4
.5	1.5	1.5	1.5	1.5
.6	1.8	1.6	1.6	1.8
.7	2.1	1.7	1.7	2.1
.8	2.4	1.8	1.8	2.4
.9	2.7	1.9	1.9	2.7
1	3	2	2	3

α	$6-3\alpha$	$9-7\alpha$	$(6-3\alpha) \wedge (9-7\alpha)$	$(6-3\alpha) \vee (9-7\alpha)$
0	6	9	6	9
.1	5.7	8.3	5.7	8.3
.2	5.4	7.6	5.4	7.6
.3	5.1	6.9	5.1	6.9
.4	4.8	6.2	4.8	6.2
.5	4.5	5.5	4.5	5.5
.6	4.2	4.8	4.2	4.8
.7	3.9	4.1	3.9	4.1
.8	3.6	3.4	3.4	3.6
.9	3.3	2.7	2.7	3.3
1	3	2	2	3

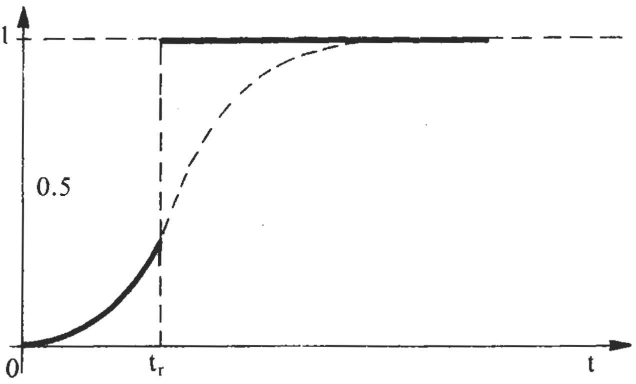
α	$A_1^{(\alpha)}\ (\wedge)\ A_1^{(\alpha)}$	$A_1^{(\alpha)}\ (\vee)\ A_1^{(\alpha)}$
0	[0, 6]	[1, 9]
.1	[0.3, 5.7]	[1.1, 8.3]
.2	[0.6, 5.4]	[1.2, 7.6]
.3	[0.9, 5.1]	[1.3, 6.9]
.4	[1.2, 4.8]	[1.4, 6.2]
.5	[1.5, 4.5]	[1.5, 5.5]
.6	[1.6, 4.2]	[1.8, 4.8]
.7	[1.7, 3.9]	[2.1, 4.1]
.8	[1.8, 3.4]	[2.4, 3.6]
.9	[1.9, 2.7]	[2.7, 3.3]
1	2	3

Такие же расчеты можно осуществлять для «усеченных» функций выживания (упреждающая замена, контроль к намеченной дате). Кривая выживания будет иметь вид



Очевидно, что выбранный момент t_r должен предшествовать дате θ нечеткого числа $\underset{\sim}{A}$. Производятся операции над усеченными функциями выживания $K_r(t)$ так же, как и при любой кривой $K(t)$.

С другой стороны, можно получить кривую $\varphi_r(t)$, соответствующую кривой $K_r(t)$:



На кривой заметен резкий скачок при $t = t_r$. Изъятие оборудования из функционирования в определенный момент t_r означает, что, начиная с $t=t_r$, вероятность поломки равна единице и выживание равно нулю.

Все приведенные выше рассуждения и расчеты являются основой для прогнозирования производства, потребностей в материалах, оценки сбыта с учетом рынка.

Глава 6. ДЕНЕЖНЫЕ ВКЛАДЫ В ТОВАРНЫЕ ЗАПАСЫ

6.1. Проблемы снабжения предприятия

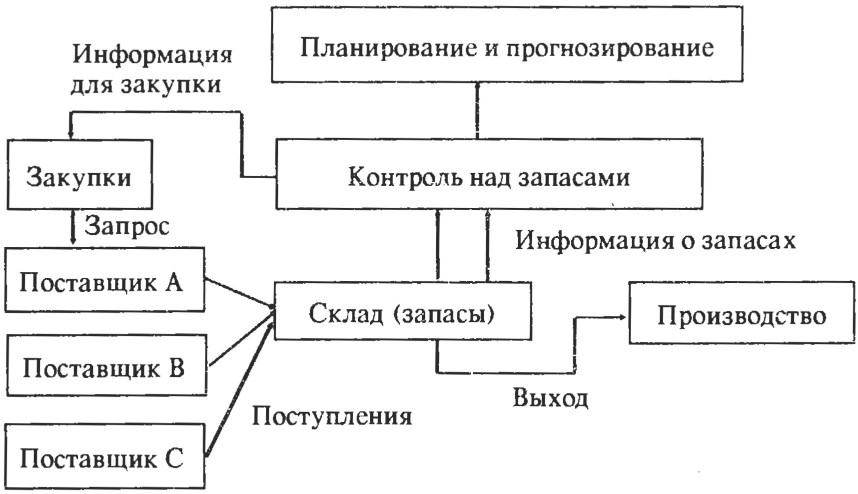
С экономической точки зрения процесс производства всегда рассматривался как центр, вокруг которого организуется деятельность предприятий. Этот процесс осуществляется благодаря включению определенных факторов производства, часть которых сведена в раздел, связанный с материалами, и обычно называется «сырье и полуфабрикаты». Для обеспечения производства требуются поставки конкретных видов материалов в определенные моменты. При этом понятно, что поставки могут быть гарантированы только в том случае, если предприятие само, а не только его поставщики, обладает возможностью обеспечивать себя определенными видами материалов в нужном количестве и в нужный момент времени. Все это обуславливает необходимость разработки эффективной программы поставок материалов для процесса производства, так как в противном случае предприятие может очутиться в ситуации остановки производства, что вызовет дополнительные затраты на рабочую силу и промышленное оборудование.

Дополнительные затраты вследствие недостаточного снабжения материалами пытались преодолеть накоплением материалов на складах предприятий. Там, где процессы производства неразвиты, функции закупок и управления товарными запасами тесно связаны между собой и трудно провести разграничения между этими понятиями. Предприятия коммерческого типа осуществляют закупки товаров для продажи, как правило, в том виде, в каком они были приобретены. Между покупкой и продажей существует промежуток времени, в течение которого товары хранятся.

Перерабатывающие предприятия закупают сырье, полуфабрикаты и вспомогательные материалы, осуществляют над ними целый ряд операций для последующей продажи полученной продукции. Передача материалов в цехи и на производственные линии требует определенных запасов.

С формальной точки зрения создание складов решает задачу накопления запасов в две стадии: сначала извне (со стороны) приобретается сырье и полуфабрикаты и потом со складов самого предприятия производится поставка на производственные линии. При этом главным остается обеспечение запасов сырья и полуфабрикатов для нормального функционирования процесса производства. При управлении снабжением могут быть выделены три этапа. Первый касается закупок, когда сырье и полуфабрикаты поступают на склады. Второй относится к объему запасов на складе. Третий касается поступления материалов со складов в цехи. Эти этапы в совокупности увязываются в следующую схему, которая является составной частью общей схемы функционирования предприятия.

Общая схема движения запасов



После составления программы потребностей требуется оценка и наблюдение за объемами запасов, которые физически образованы на складах.

Если возникает потребность в закупке материалов, то поставщики получают заказ, в котором среди других данных обычно содержится указание о сроках поставок. Функционирование склада заключается в перемещении материалов в двух направлениях. С одной стороны, имеет место поступление материалов извне предприятия и,с другой — перемещение со склада до производственных линий.

При решении в целом задачи создания товарных запасов возникают два взаимоисключающих суждения относительно величины запасов.

Предприниматель стремится располагать как можно большим количеством материалов для того, чтобы в любой момент обеспечить производство такого количества продукции, которое запросят потребители. Однако само хранение запасов требует больших денежных расходов, связанных с замораживанием капитала, содержанием зданий и организацией охраны и, возможно, с другими факторами. Возникает потребность найти равновесие противоположных тенденций для определения условий, которые могли бы считаться экономическим оптимумом.

Экономический аспект исследований в области предпринимательства особо выделяет запасы и их наличность на складе, поскольку их можно оценить с количественной точки зрения и обеспечить определение равновесия спроса и предложения, отодвигая на второй план осуществление закупок и поставок материалов, так как считается, что они носят чисто административный характер.

Современная концепция управления запасами возникла между 1915 и 1922 годами, когда некоторые ученые, работавшие независимо, вывели формулу для вычисления объема партии изготовленного товара, при котором минимизируется сумма затрат на закупку * и хранение запасов при постоянном спросе. В последующие годы эту теорию развил Вильсон, и его имя связывается с методом определения момента фиксированного заказа. Позднее, в сороковые и в начале пятидесятых годов, происходит развитие теории управления запасами и ее практическое использование. Многочисленность научных статей по этой теме говорит о большом интересе к таким задачам.

Очевидно, что управление запасами предприятия не ограничивается задачей получения материалов для целей производства или сбыта, и поскольку запасы по сути являются замороженными средствами, сравнимыми с вложениями в промышленное оборудование или акции, то в определенной степени управление ими представляет собой финансовую проблему. Отличие их от других элементов производства заключается в сроке замораживания. В соответствии с подходом Кейнса к анализу рынка капиталов в области чистой теории к запасам можно применить, как это сделал Эрроу, те же критерии, которые побуждают хранить наличные средства. Предприниматели предпочитают сохранять запасы материалов, несмотря на то, что они могли бы вложить замороженные при этом деньги во что-нибудь другое по трем основным причинам.

1. Осуществление производственной деятельности неизбежно приводит к тому, чтобы сохранять определенный объем запасов.

2. Благоразумное отношение к будущему, которое представляется неясным, поскольку во многих случаях невозможно предвидеть точный объем спроса на товары. Только в считанных случаях можно обойтись без страховых запасов, когда сырье получается непосредственно, без чрезмерных затрат или когда задержка в поставках не приведет к значительным затратам.

3. Возникающий спекулятивный аспект в том случае, когда ожидается быстрый рост цен или имеется надежда на увеличение сбыта в будущем, что обеспечит получение большей прибыли.

Таким образом, становится явной необходимость затрат на хранение материалов с целью поддержания уровня обслуживания для получения прибыли. Для этого необходимо формально исследовать задачу управления

---

* Если материалы не покупаются у поставщиков, а изготавливаются на самом предприятии, стоимость закупки заменяется стоимостью выпуска.

запасами с учетом экономических параметров, влияющих на запасы. В основе таких исследований лежит знание о будущем спросе. При этом возможно по крайней мере три случая.

1. Предприятие точно знает величину будущего спроса. В этой ситуации задача управления запасами рассматривается в области определенности.

2. Предприятие в состоянии знать вероятностное распределение будущего спроса. Подобная информация появляется на основе достаточного объема данных о предыдущих ситуациях при условии, что явления повторяются.

3. Предприятию не известны уровни будущего спроса, хотя маловероятно полное незнание. Здесь можно воспользоваться опытом принятия решений в условиях неопределенности.

6.2. Управление запасами при постоянном спросе

При управлении запасами базовыми предположениями являются гипотезы о том, что известны как стоимость выпуска, так и стоимость хранения в случае закупки. Предполагается, кроме того, что существует постоянный спрос на определенные материалы в количестве k предметов за единицу времени. Не допускается возможность прерывания запасов, и предметы поставляются сериями или «лотами». Стоимость выпуска или закупки одного лота не зависит от количества входящих в него предметов. Обозначим эту постоянную стоимость через C_l. Стоимость хранения одного предмета в единицу времени (например, один день) обозначим C_s. Полный спрос на интервале времени длины θ будет N. Если предположить, что лот всегда имеет одно и то же количество предметов n, то это значение n нужно определить так, чтобы общая стоимость выпуска N предметов была минимальной. Будет определяться также число лотов r и период T пополнения запасов. Управление запасами в этих условиях может быть представлено следующим образом:

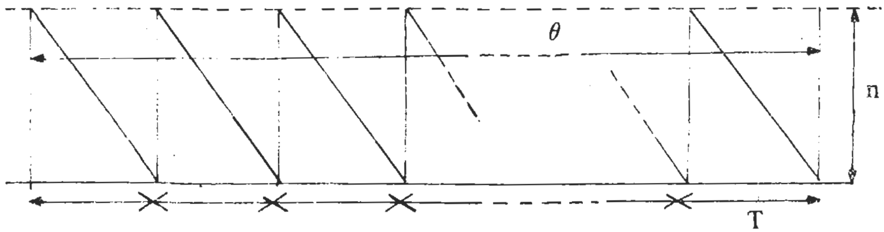


Рис. 6.1

Как видно из следующего графика, средний уровень запасов на период T составляет n/2:

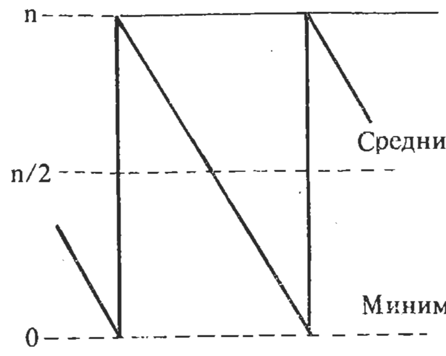


Рис. 6.2

Стоимость хранения для каждого промежутка времени составит $(1/2)\ n\ C_s\ T$ и полная стоимость лота равна

$$C_l + (1/2)\ n\ C_s\ T$$

Из условия линейности величины спроса относительно времени имеем

$$n = k\ T.$$

Количество лотов равно

$$r = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}.$$

Полная стоимость для интервала времени длины θ составляет

$$\Gamma = (C_l + (1/2)\, nTC_s) \cdot r = (C_l + \frac{nT}{2} C_s) \frac{N}{n} =$$

$$= \frac{NC_l}{n} + \frac{NT}{2} C_s = \frac{NC_l}{n} + \frac{\theta \cdot C_s}{2} n .$$

Если предполагается, что известны величины N, θ, C_l и C_s, то Γ является функцией от переменной n:

$$\Gamma(n) = \frac{N}{n} C_l + \frac{\theta \cdot n}{2} C_s .$$

Назовем $\Gamma_l = \frac{N}{n} \cdot C_l$ общими расходами на выпуск и $\Gamma_s = \frac{1}{2}\theta \cdot n \cdot C_s$ расходами на хранение.

Видно, что Γ_l обратно пропорционально n, а Γ_s пропорционально n. Функции Γ_l, Γ_s, $\Gamma(n)$ имеют вид:

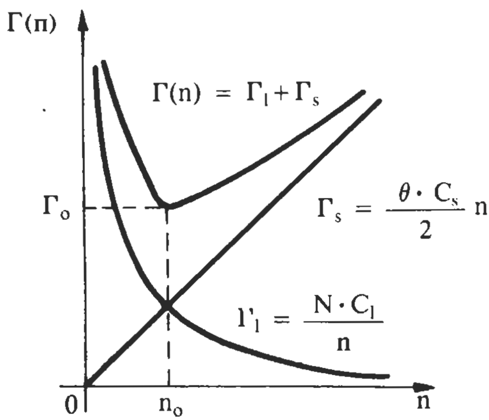


Рис. 6.3

Из графика видно, что сумма

$$\Gamma(n) = \Gamma_l + \Gamma_s$$

достигает минимума при определенном значении n. Известно, что минимум суммы двух переменных величин, произведение которых постоянно, достигается тогда, когда эти величины равны. В нашем случае

$$\Gamma_l \cdot \Gamma_s = \frac{1}{2} N \cdot C_l \cdot C_s \cdot \theta = \text{const} ,$$

и минимум $\Gamma_l + \Gamma_s$ получится, когда

$$\Gamma_l = \Gamma_s ,$$

т. е. , при

$$n = n_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \frac{C_l}{C_s}} .$$

Отсюда

$$\Gamma = \frac{N \cdot C_l}{n} + \frac{\theta \cdot C_s}{2} n .$$

Такой же результат можно получить, используя необходимое условие экстремума функции одной переменной, т. е. из уравнения

$$\Gamma' = 0 ,$$

где Γ' — производная функции Γ по n.

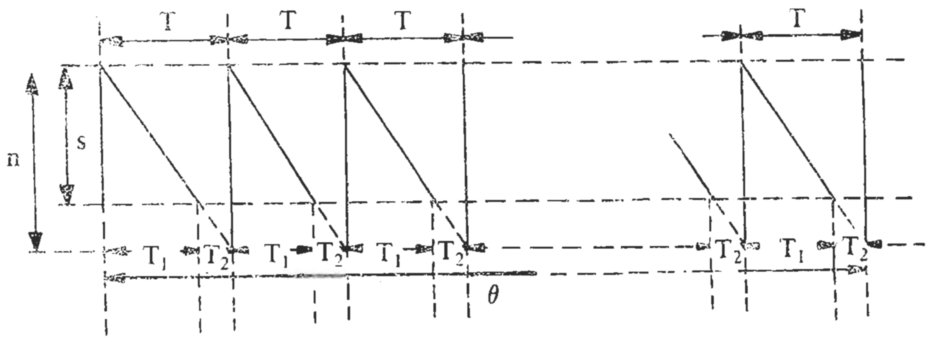
Напомним, что в этой схеме единственной переменной является n, а параметры N, θ, C_l и C_s — постоянные. Исходя из системы

$$\begin{cases} \dfrac{N}{n} = \dfrac{\theta}{T} , \\ n = \sqrt{\dfrac{2N}{\theta} \dfrac{C_l}{C_s}} , \end{cases} \quad \text{получим} \quad T = T_o = \sqrt{2 \frac{\theta}{N} \frac{C_l}{C_s}} ,$$

и исходя из

$$\begin{cases} n_o = \sqrt{2 \dfrac{N}{\theta} \dfrac{C_l}{C_s}} , \\ \Gamma = \dfrac{N \cdot C_l}{n} + \dfrac{\theta . C_s}{2} n , \end{cases} \quad \text{получим} \quad \Gamma_o = \Gamma(n_o) = \sqrt{2N \cdot C_l . C_s \cdot \theta}$$

Рассмотрим этот же самый случай в предположении, что учитываются затраты, происходящие из-за нехватки материалов, или, по-другому, затраты в связи с нарушением поставок. Пусть C_p — величина таких расходов на единицу времени. В конце каждого временного интервала T осуществляется выпуск лота из n предметов, предназначенный, с одной стороны, для удовлетворения спроса $s' = n - s$, который не был удовлетворен за период времени T_2, и, с другой стороны, для пополнения запасов s. Графически эта схема может быть представлена следующим образом :



На протяжении времени T_1 каждого периода T ежедневный уровень запасов оказывается достаточным для удовлетворения спроса. Затем происходит прерывание запасов, и в течение времени T_2 имеется нехватка материала, и остаток снабжается поступлением из запасов следующего лота. Пусть s — максимальный уровень запасов. Из предыдущего графика видно, что

$$\frac{T_1}{T} = \frac{s}{n}, \qquad \frac{T_2}{T} = \frac{n-s}{n},$$

откуда

$$T_1 = \frac{s}{n}T, \qquad T_2 = \frac{n-s}{n}T.$$

Итак, теперь имеем:

1) затраты на хранение лота, равные $(1/2)s \cdot T_1 \cdot C_p$;
2) затраты на выпуск одного лота, равные C_1 ;

3) затраты на прекращение выпуска, соответствующего одному лоту, равные $(1/2)\ (n-s)\ T_2\ C_p$.

Общие затраты составят

$$\Gamma(n,\ s) = \left[\frac{1}{2} s \cdot T_1 \cdot C_s + C_1 + \frac{1}{2}\ (n - s)\ T_2 C_p\right] \cdot r\ ,$$

причем

$$r = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}\ .$$

Подставив выражения для T_1, T_2 и r, получим

$$\Gamma(n,\ s) = \frac{s^2 \cdot \theta}{2n} C_s + \frac{N}{n} C_1 + \frac{(n - s)^2 \cdot \theta}{2n} C_p\ .$$

Для расчета экстремума этой функции двух переменных n и s найдем ее частные производные по n и s и приравняем их нулю :

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta n} = -\frac{s^2 \cdot C_s \cdot \theta}{2n^2} - \frac{N}{n^2} C_1 + \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) \frac{\theta}{2} C_p = 0\ ,$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta s} = \frac{s \cdot \theta}{n} C_s - \frac{n - s}{n} C_p \cdot \theta = 0\ .$$

Из этих уравнений получим

$$s = n \frac{C_p}{C_p + C_s}$$

и

$$n^2 \cdot C_p - (C_s + C_p)\ s^2 = \frac{2 C_1 N}{\theta}\ ,$$

откуда

$$(6.1) \qquad n = n_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \frac{C_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}},$$

$$(6.2) \qquad s = s_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \frac{C_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_p}{C_s + C_p}} = n_o \cdot \frac{C_p}{C_s + C_p}.$$

Можно убедиться, что значения n_0 и s_0 доставляют минимум функции Г, проверив с помощью частных производных второго порядка, что неравенства

$$(6.3) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\delta^2 Г}{\delta n\, \delta s}\right)^2 - \dfrac{\delta^2 Г}{\delta n^2} \quad \dfrac{\delta^2 Г}{\delta s^2} < 0, \\[2ex] \dfrac{\delta^2 Г}{\delta n^2} > 0, \\[2ex] \dfrac{\delta^2 Г}{\delta s^2} > 0 \end{cases}$$

выполняются при $n = n_0$ и $s = s_0$.

Величина

$$\rho = \frac{C_p}{C_s + C_p}$$

называется «уровень прерывания». Эта величина играет важную роль в задачах управления запасами, где допускается прерывание запасов. При этом констатируется, что величины n_0 и s_0 должны выбираться так, чтобы

$$\frac{s_0}{n_0} = \rho,$$

что позволяет записать:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{s_0}{n_0} = \rho$$

и

$$\frac{T_2}{T} = 1 - \rho .$$

Когда говорят о существовании уровня прерывания, равного ρ, допускается, что $1-\rho$ раз производится прерывание запасов на интервале T.

Исходя из (6.1) и (6.2), получаем :

8

$$(6.4) \qquad T_o = \sqrt{2\,\frac{\theta}{N}\,\frac{C_l}{C_s}}\,\sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}} ,$$

$$(6.5) \qquad \Gamma_o = \sqrt{2N\,C_s C_l \theta}\,\sqrt{\frac{C_p}{C_s + C_p}} ,$$

$$n_0 = \frac{(n_0 \quad \text{для}\ \rho = 1)}{\sqrt{\rho}} , \qquad s_0 = (n_0 \quad \text{для}\ \rho = 1)\ \sqrt{\rho}$$

$$T_0 = \frac{(T_0 \quad \text{для}\ \rho = 1)}{\sqrt{\rho}} , \qquad \Gamma_0 = (\Gamma_0 \quad \text{для}\ \rho = 1)\ \sqrt{\rho}$$

Таким образом, предположения о том, что $\rho < 1$, приводят к необходимости увеличивать (по сравнению со случаем $\rho = 1$) значения n_0 и T_0 и уменьшать s_0 и Γ_0.

6.3. Использование нечетких чисел в задаче о запасах

На практике в большинстве задач о запасах, включая и задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, как C_l, так и C_s может быть известна неполностью. Тогда можно допустить, что $\underset{\sim}{C}_l$ и $\underset{\sim}{C}_s$ — нечеткие числа, которые (для простоты) имеют треугольную форму. Пусть

$$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l}) ,$$

$$\underset{\sim}{C}_s = (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s}) .$$

8. Зак. 5395

Как известно, если $\underset{\sim}{C}_l$ и $\underset{\sim}{C}_s$ — нечеткие числа треугольной формы, то ни $\underset{\sim}{C}_l/\underset{\sim}{C}_s$, ни $\underset{\sim}{C}_l \cdot \underset{\sim}{C}_s$ и, следовательно, $\sqrt{\underset{\sim}{C}_l/\underset{\sim}{C}_s}$, $\sqrt{\underset{\sim}{C}_l \cdot \underset{\sim}{C}_s}$ такими не являются. Для получения нечетких чисел, соответствующих n_0, T_0 и Γ_0, вполне обоснованно можно осуществить расчет для α-сечений независимо от возможности получения упомянутых нечетких чисел треугольной формы посредством приближений. Для α-сечений C_l и C_s можно записать:

$$C_l^{(\alpha)} = [C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha, \quad C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha], \quad \alpha \in [0,1], \tag{6.6}$$

$$C_s^{(\alpha)} = [C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha, \quad C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha], \quad \alpha \in [0,1], \tag{6.7}$$

$$\frac{C_l^{(\alpha)}}{C_s^{(\alpha)}} = \left[\frac{C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha}{C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha}, \quad \frac{C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha}{C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha}\right], \quad \alpha \in [0,1], \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} C_l^{(\alpha)} \cdot C_s^{(\alpha)} = {} & [(C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha) \cdot (C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha), \\ & (C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha) \cdot (C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha)] \quad \alpha \in [0,1]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Учтем теперь, что если $\underset{\sim}{A}$ — произвольное нечеткое число в R^+ с α-сечением

$$A^{(\alpha)} = [A_{1\alpha}, A_{1\alpha}],$$

то

$$\sqrt{A^{(\alpha)}} = [\sqrt{A_{1\alpha}}, \sqrt{A_{1\alpha}}].$$

Поэтому получим:

$$\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}} = \left[\sqrt{\frac{C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha}{C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha}}, \sqrt{\frac{C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha}{C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha}}\right], \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{C_l^{(\alpha)} \cdot C_s^{(\alpha)}} = {} & [\sqrt{(C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha) \cdot (C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha)}, \\ & \sqrt{(C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha) \cdot (C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha)}]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Поскольку N и θ не являются нечеткими, то для α-сечений $\underset{\sim}{n}_0$, $\underset{\sim}{T}_0$ и $\underset{\sim}{\Gamma}_0$ можно записать:

(6.12) $$n_{o\alpha} = \sqrt{2\,\frac{N}{\theta}}\;\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}},$$

(6.13) $$T_{o\alpha} = \sqrt{2\,\frac{\theta}{N}}\;\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}},$$

(6.14) $$\Gamma_{o\alpha} = \sqrt{2N\,\theta}\;\sqrt{C_l^{(\alpha)}\cdot C_s^{(\alpha)}}.$$

Теперь, поскольку α-сечения известны, можно изобразить соответствующие функции принадлежности для $\underset{\sim}{n}_0$, $\underset{\sim}{T}_0$ и $\underset{\sim}{\Gamma}_0$ с необходимой точностью, которая задается путем пошагового перебора значений α.

Эта схема может быть проиллюстрирована следующим числовым примером.

Пусть N — 120 000 физических единиц,

θ — 360 дней,

$\underset{\sim}{C}_l$ — (200 000, 300 000, 370 000) денежных единиц,

$\underset{\sim}{C}_s$ — (3, 3.5, 4.4) за единицу и день в денежных единицах.

Сначала рассчитаем постоянные коэффициенты из формул (6.12)—(6.14):

$$\sqrt{2\,\frac{N}{\theta}} = \sqrt{2\,\frac{120\,000}{360}} = 25.8198,$$

$$\sqrt{2\,\frac{\theta}{N}} = \sqrt{2\,\frac{360}{120\,000}} = 0.07745,$$

$$\sqrt{2\cdot N\cdot\theta} = \sqrt{2\cdot 360\cdot 120\,000} = 9295.16.$$

Далее вычисляем нечеткие числа, для которых α-сечениями являются $\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}}$ и $\sqrt{C_l^{(\alpha)}\cdot C_s^{(\alpha)}}$, полученные из (6.6), (6.7), (6.10) и (6.11):

$$C_l^{(\alpha)} = [200\,000 + 100\,000\alpha,\ 370\,000 - 70\,000\alpha\,],$$

$$C_s^{(\alpha)} = [3 + 0.5\alpha\,],\ 4.4 - 0.9\alpha\,],$$

$$\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}} = \left[\sqrt{\frac{200.000+100.000\alpha}{4.4—0.9\alpha}}, \sqrt{\frac{370.000—70.000\alpha}{3+0.5\alpha}}\right],$$

$$\sqrt{C_l^{(\alpha)} \cdot C_s^{(\alpha)}} =$$

$$= [\sqrt{(200.000+100.000\alpha)\ (3+0.5\alpha)}, \sqrt{(370.000—70.000)\ (4.4—0.9\alpha)}].$$

Затем осуществляется расчет α-сечений от 0 до 1 с шагом 0.1. (табл. 6.1 , 6.2) :

Таблица 6.1

α	$\sqrt{C_l^{(\alpha)}\ (:)\ C_s^{(\alpha)}}$	
0	213.200	351.188
.1	220.734	344.987
.2	228.325	338.878
.3	235.987	332.856
.4	243.733	326.917
.5	251.577	321.055
.6	259.533	315.268
.7	267.615	309.549
.8	275.838	303.896
.9	284.218	298.304
1	292.770	

Таблица 6.2

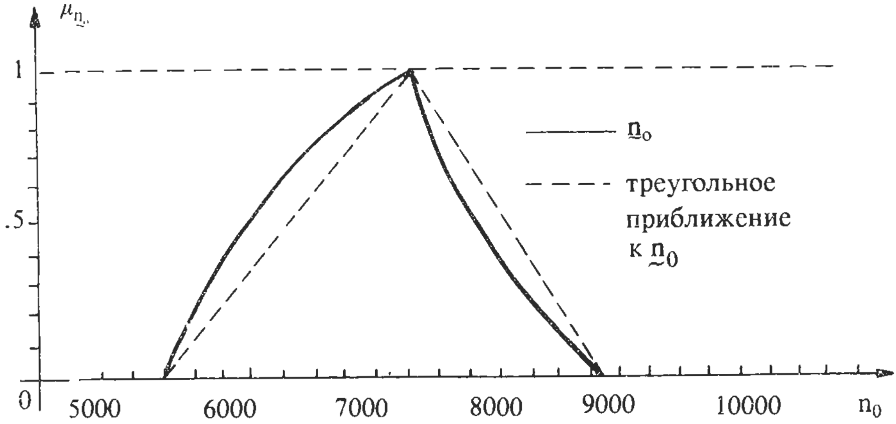
α	$\sqrt{C_l^{(\alpha)} (\cdot) C_s^{(\alpha)}}$	
0	774.595	1275.931
.1	800.312	1250.811
.2	825.832	1225.691
.3	851.175	1200.570
.4	876.356	1175.448
.5	901.387	1150.326
.6	926.282	1125.202
.7	951.052	1100.077
.8	975.704	1074.951
.9	1000.249	1049.823
1	1024.695	

Рассчитаем количество предметов в лоте как нечеткое число (табл. 6.3) :

Таблица 6.3

α	$n_{0\alpha}$		$[5504+20.55\alpha, 9067-1508\alpha]$	
0	5504	9067	5504	9067
.1	5699	8907	5709	8916
.2	5895	8749	5915	8765
.3	6093	8594	6120	8614
.4	6293	8440	6326	8463
.5	6495	8289	6531	8313
.6	6701	8140	6737	8162
.7	6909	7992	6942	8011
.8	7122	7846	7148	7860
.9	7338	7702	7353	7709
1	7559		7559	

Таким образом, получено нечеткое число $\underset{\sim}{n}_0 = (5504, 7559, 9067)$. Графически имеем :

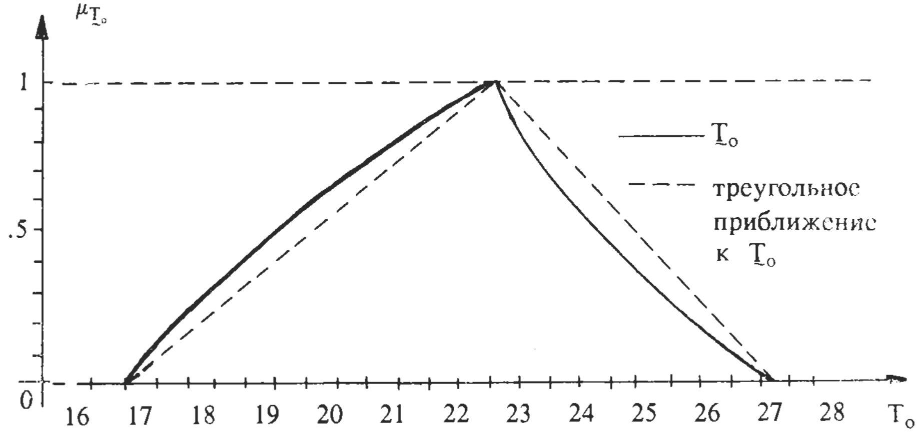


Время поставки каждого лота будет определено следующим образом (табл. 6.4) :

Т а б л и ц а 6.4

α	$T_{0\alpha}$		[16.51+6.16α, 27.19−4.43α]	
0	16.51	27.19	16.510	27.190
.1	17.09	26.71	17.126	26.747
.2	17.68	26.24	17.742	26.304
.3	18.27	25.77	18.358	25.861
.4	18.87	25.31	18.974	25.418
.5	19.48	24.86	19.590	24.975
.6	20.10	24.41	20.206	24.532
.7	20.72	23.97	20.822	24.089
.8	21.36	23.53	21.438	23.646
.9	22.01	23.10	22.054	23.203
1	22.67		22.67	

Таким образом, получено нечеткое число $\underset{\sim}{T}_0$ = (16.51, 22.67, 27.19). Графически имеем:

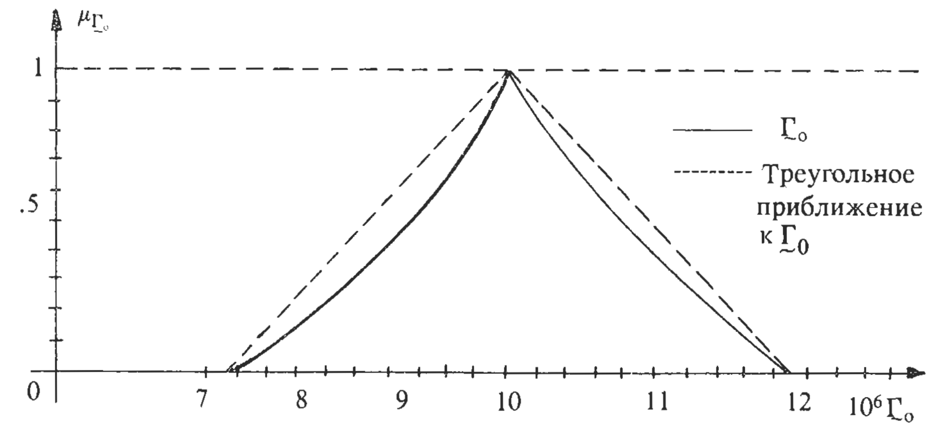


Общие минимальные затраты за 360 дней определятся следующим образом (табл. 6.5) :

Т а б л и ц а 6.5

α	$\Gamma_{0\alpha}$		[7199.984+2324.719α, 11859.982−2334.497α]	
0	7199.984	11859.982	7199.9840	11859.982
.1	7439.028	11626.488	7432.4559	11626.532
.2	7676.240	11392.993	7664.4278	11393.083
.3	7911.807	11159.490	7897.3997	11159.633
.4	8145.869	10925.977	8129.8716	10926.183
.5	8378.536	10692.464	8362.3435	10692.734
.6	8609.939	10458.932	8594.8154	10459.284
.7	8840.180	10225.391	8827.2873	10225.834
.8	9069.324	9991.841	9059.7592	9992.384
.9	9297.474	9758.272	9292.2311	9758.934
1	9524.703		9524.7030	

Таким образом, получено нечеткое число $\underset{\sim}{\Gamma}_0$ = (7199.984, 9524.703, 11859.982). Графически имеем :



Можно заметить, что приближение нечетким треугольным числом приемлемо на всех трех графиках. Поэтому в этом контексте представляется ненужным вывод достаточно сложных общих выражений для отклонений между реальными кривыми и их приближениями.

Задачу управления можно рассматривать с учетом возможности прерывания запасов в нечеткой области.

Действительно, если исходить из выражения

$$\Gamma(n,\ s) = \frac{s^2\theta}{2n} C_s + \frac{N}{n} C_l + \frac{(n-s)^2\theta}{2n} C_p \quad ,$$

полученного в детерминированной модели, и рассматривать нечеткие затраты $\underset{\sim}{C}_l$, $\underset{\sim}{C}_s$ и $\underset{\sim}{C}_p$ при условии, что параметры N, n, s и θ— обычные величины, причем N и θ— постоянные, а n и s — переменные, то затраты $\underset{\sim}{\Gamma}$(n,s) будут также нечеткими

$$\underset{\sim}{\Gamma}(n,\ s) = \frac{s^2\theta}{2n} \cdot \underset{\sim}{C}_s \ (+)\ \frac{N}{n} \underset{\sim}{C}_l \ (+)\ \frac{(n-s)^2\theta}{2n} \underset{\sim}{C}_p \quad , \tag{6.15}$$

где символ (+) напоминает, что речь идет о сложении нечетких чисел.

Оказывается, что в этой постановке можно также найти формулы типа (6.1), (6.2). Каждому значению, которое приписывается затратам C_l, C_s и C_p, соответствует оптимальное значение Г, n и s. Анализируя возможные значения, получаем нечеткие числа, функции принадлежности которых будут определяться по формулам типа (6.1), (6.2), (6.4), (6.5), где числа $\underset{\sim}{C}_l$, $\underset{\sim}{C}_s$ и $\underset{\sim}{C}_p$, а через них и $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{s}$, $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{\Gamma}$ рассматриваются как нечеткие.

Для упрощения, как и ранее, предположим, что числа $\underset{\sim}{C}_l$, $\underset{\sim}{C}_s$ и $\underset{\sim}{C}_p$ имеют треугольную форму :

$$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l}),$$
$$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l}),$$
$$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l}).$$

При этих нечетких числах выражение (6.15) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\Gamma}(n,\ s)\ =\ &\frac{s^2\theta}{2n}\,(C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (+)\\ &(+)\ \frac{N}{n}\,(C_{1l},\ C_{2l},\ C_{3l})\ (+)\\ &(+)\ \frac{(n-s)^2\theta}{2n}\,(C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p}),\end{aligned}$$

и для оптимальных значений

$$(6.16)\qquad \underset{\sim}{\Gamma}_o = \sqrt{2N\theta}\cdot\sqrt{(C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (\cdot)\ (C_{1l},\ C_{2l},\ C_{3l})}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{(C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p})\ (:)\ ((C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (+)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p}))},$$

$$(6.17)\qquad \underset{\sim}{n}_o = \sqrt{\frac{2N}{\theta}}\cdot\sqrt{((C_{1l},\ C_{2l},\ C_{3l})\ (:)\ (C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{((C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (+)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p}))\ (:)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p})},$$

$$(6.18)\qquad \underset{\sim}{s}_o = \sqrt{\frac{2N}{\theta}}\cdot\sqrt{((C_{1l},\ C_{2l},\ C_{3l})\ (:)\ (C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{(C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p})\ (:)\ ((C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (+)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p}))},$$

$$(6.19)\qquad \underset{\sim}{T}_o = \sqrt{\frac{2\theta}{N}}\cdot\sqrt{((C_{1l},\ C_{2l},\ C_{3l})\ (:)\ (C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{((C_{1s},\ C_{2s},\ C_{3s})\ (+)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p}))\ (:)\ (C_{1p},\ C_{2p},\ C_{3p})}.$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть :

$N = 120\,000$ единиц ,

$\theta = 360$дней ,

$\underset{\sim}{C}_l = (200\,000,\ 300\,000,\ 370\,000)$ денежных единиц ,

$\underset{\sim}{C}_s = (3,\ 3.5,\ 4.4)$ за единицу в день ,

$\underset{\sim}{C}_p = (20,\ 35,\ 40)$ за единицу в день.

Найдем :

$$(6.20) \qquad \sqrt{2\,\frac{N}{\theta}} = 25.8198,$$

$$(6.21) \qquad \sqrt{2\,\frac{\theta}{N}} = 0.07745,$$

$$(6.22) \qquad \sqrt{2N\theta} = 9295.16\ .$$

Значения $\sqrt{C_l{}^{(\alpha)}\ (:)\ C_s{}^{(\alpha)}}$ и $\sqrt{C_l{}^{(\alpha)}\ (\cdot)\ C_s{}^{(\alpha)}}$ получены в табл. 6.1 и 6.2. Рассчитаем

$$\sqrt{(C_s^{(\alpha)}\ (+)\ C_p^{(\alpha)})\ (:)\ C_p^{(\alpha)}}$$

и

$$\sqrt{C_p^{(\alpha)}\ (:)\ (C_s^{(\alpha)})\ (+)\ (C_p^{(\alpha)})}\ ,$$

учитывая, что одно выражение обратно другому. Имеем

$$C_s^{(\alpha)}\ (+)\ C_p^{(\alpha)} = (3,\ 3.5,\ 4.4)\ (+)\ (20,\ 35,\ 40) = (23,\ 38.5,\ 44.4)$$

с α-сечением

$$(6.23) \qquad [23 + 15.5\alpha,\ 44.4 — 5.9\alpha\,].$$

С другой стороны, α-сечение $C_p{}^{(\alpha)}$ равно

$$(6.24) \qquad [20 + 15\alpha,\ 40 — 5\alpha\,],$$

α-сечение частного (6.23) / (6.24) равно

$$\left[\frac{23 + 15.5\alpha}{40 — 5\alpha},\ \frac{44.4 — 5.9\alpha}{20 + 15\alpha}\right],$$

корень равен

$$\left[\sqrt{\frac{23+15.5\alpha}{40-5\alpha}},\ \sqrt{\frac{44.4-5.9\alpha}{20+15\alpha}}\right]$$

и его обратная величина будет

$$\left[\sqrt{\frac{20+15\alpha}{44.4-5.9\alpha}},\ \sqrt{\frac{40-5\alpha}{23+15.5\alpha}}\right].$$

Табл. 6.6 и 6.7 дают α-сечения с шагом 0.1.

Таблица 6.6

α	$\left[\sqrt{\frac{23+15.5\alpha}{40-5\alpha}},\ \sqrt{\frac{44.4-5.9\alpha}{20+15\alpha}}\right]$	
0	.758287	1.489966
.1	.788364	1.427471
.2	.818065	1.370813
.3	.847456	1.319090
.4	.876596	1.271582
.5	.905538	1.227710
.6	.934330	1.186998
.7	.963014	1.149055
.8	.991631	1.113552
.9	1.020218	1.080215
1	1.048808	

Таблица 6.7

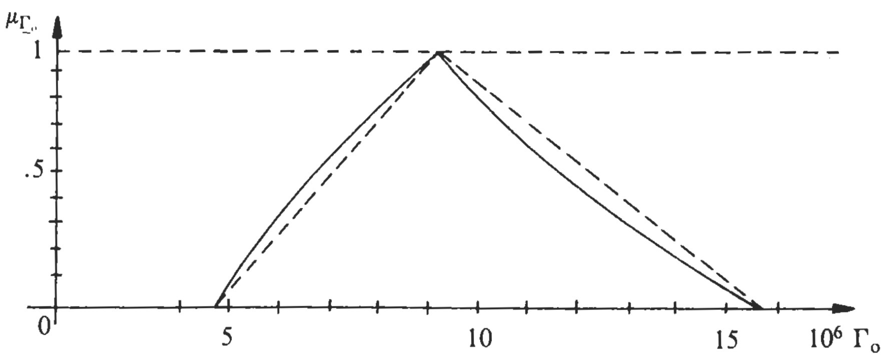
α	$\left[\sqrt{\frac{20+15\alpha}{44.4-5.9\alpha}},\ \sqrt{\frac{40-5\alpha}{23+15.5\alpha}}\right]$	
0	.671156	1.318760
.1	.700539	1.268448
.2	.729493	1.222396
.3	.758098	1.180002
.4	.786421	1.140775
.5	.814524	1.104315
.6	.842461	1.070285
.7	.870280	1.038405
.8	.898026	1.008438
.9	.925741	.980182
1	.953462	

Составляются таблицы, соответствующие $\underset{\sim}{\Gamma}_0$, $\underset{\sim}{n}_0$, $\underset{\sim}{s}_0$, $\underset{\sim}{T}_0$. Данные из табл. 6.2 и 6.7 позволяют получить табл. 6.8 .

Т а б л и ц а 6.8

α	$\Gamma_o^{(\alpha)}$	
0	4832312	15640470
.1	5211329	14747596
.2	5599763	13926750
.3	5997925	13168220
.4	6406082	12464081
.5	6824518	11807848
.6	7253538	11194038
.7	7693432	10618097
.8	8144489	10076152
.9	8607053	9564883
1	9081443	

На графике имеем :

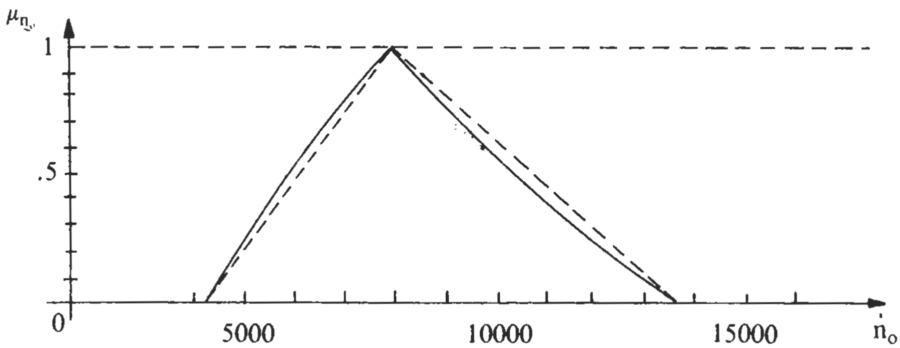


Далее последовательно получаем табл. 6.9 , 6.10 , 6.11 :

Т а б л и ц а 6.9

α	$n_o^{(\alpha)}$	
0	4174	13510
.1	4493	12715
.2	4822	11994
.3	5163	11336
.4	5516	10733
.5	5882	10177
.6	6261	9662
.7	6654	9183
.8	7062	8737
.9	7486	8319
1	7928	

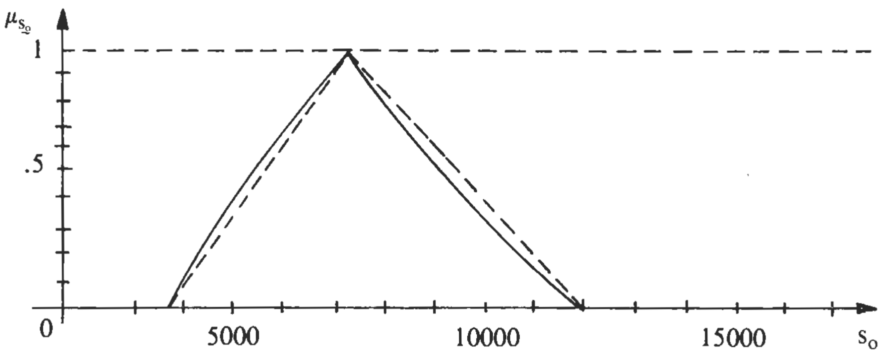
и соответствующий график



Т а б л и ц а 6.10

α	$s_o^{(\alpha)}$	
0	3694	11957
.1	3992	11298
.2	4300	10695
.3	4619	10141
.4	4949	9629
.5	5290	9154
.6	5645	8712
.7	6013	8299
.8	6395	7912
.9	6793	7549
1	7207	

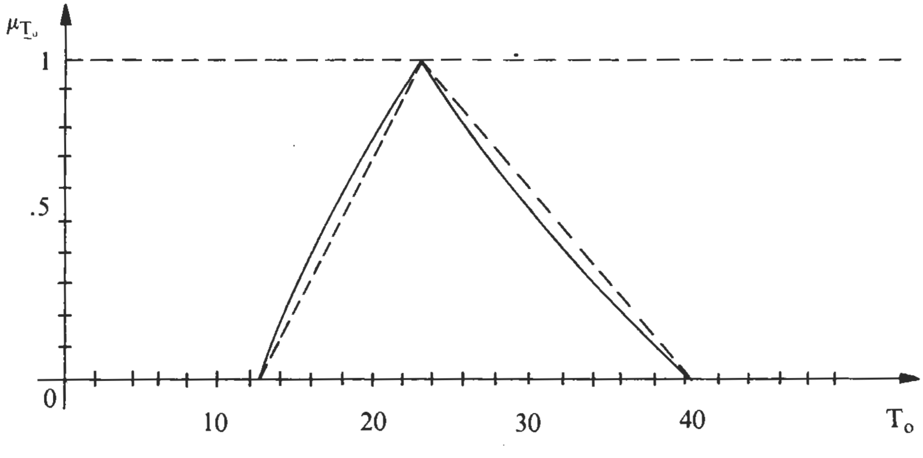
и соответствующий график



Т а б л и ц а 6.11

α	$T_o^{(\alpha)}$	
0	12.52	40.52
.1	13.47	38.14
.2	14.46	35.97
.3	15.48	34.00
.4	16.54	32.19
.5	17.64	30.52
.6	18.78	28.98
.7	19.96	27.54
.8	21.18	26.20
.9	22.45	24.95
1	23.78	

и соответствующий график



На этих графиках представлено сравнение полученных данных с соответствующими нечеткими числами. Можно отметить, что приближение по точности приемлемо, поэтому имеем :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\Gamma}_o &= (4832312,\ 9081443,\ 15640470)\ , \\
\underset{\sim}{\mathbf{n}}_o &= (4173,\ 7928,\ 13510)\ , \\
\underset{\sim}{\mathbf{s}}_o &= (3694,\ 7207,\ 11957)\ , \\
\underset{\sim}{\mathbf{T}}_o &= (12.52,\ 23.78,\ 40.52)\ .
\end{aligned}$$

Относительно понятия уровня прерывания, определенного выше в (6.3), отметим, что в области нечеткости оно теряет содержательный смысл, поскольку может превышать единицу. Действительно, из табл. 6.7 для формулы

$$\sqrt{\frac{\underset{\sim}{C}_p}{\underset{\sim}{C}_s\ (+)\ \underset{\sim}{C}_p}}$$

получим результат, превышающий единицу. Появление значений ρ, превышающих единицу, является следствием существования нечеткого частного. Чтобы устранить этот недостаток, используем понятие «коэффициент прерывания» $k \in [1, \infty]$ как сомножитель для $\underset{\sim}{C}_s$, при котором

$$\underset{\sim}{C}_p = k \cdot \underset{\sim}{C}_s .$$

Это означает, что затраты, вызванные прерыванием, в k раз более важны, чем затраты на запасы. Например, если

$$\underset{\sim}{C}_p = 10\ \underset{\sim}{C}_s$$

и $\underset{\sim}{C}_s = (3, 3.5, 4.4)$, то получим

$$\underset{\sim}{C}_p = 10\ \underset{\sim}{C}_s = 10\ (3, 3.5, 4.4) = (30, 35, 44)$$

вместо $\underset{\sim}{C}_p = (20, 35, 40)$, полученного ранее.

Преобразование формальных данных в нечеткие может применяться ко многим другим задачам управления запасами. При этом нечеткие данные можно комбинировать с предположением о случайном характере других параметров.

ГЛАВА 7. УЧЕТ ФАКТОРА ТРУДА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ

7.1. Важность отбора персонала

Одним из важнейших элементов, влияющих на деятельность предприятия, является фактор труда. На это постоянно и с различных позиций обращалось большое внимание в работах по микроэкономике. С экономической точки зрения его важность в процессе производства связана с затратами, которые вместе с другими факторами производства составляют общие затраты предприятия. Анализ производительности труда заслуживает внимания в любом исследовании, раскрывающем проблемы предприятия. Работа предприятия зависит от способностей людей, включенных в производственный процесс. Поэтому отбор персонала, подключение новых кадров является одной из важнейших задач предпринимателя, поскольку от успешности выбора в конечном итоге зависит работа и качество продукции.

Адекватный отбор вызывает затраты, которые, как ожидается, будут компенсироваться эффективной работой персонала, наиболее подготовленного для осуществления деятельности предприятия. Конечно, прием работника, который по своим качествам не отвечает требованиям, не является непоправимой ошибкой, поскольку такой работник может быть отстранен. Однако эта ошибка может, кроме морального ущерба, нанесенного человеку, нанести затраты предприятию. Сюда входят, во-первых, затраты, относящиеся собственно к отбору персонала, во-вторых, затраты, вызванные неэффективной работой без желаемых результатов, и, в-третьих, затраты, связанные с увольнением. Отсюда очевидна необходимость процесса отбора, который позволит сократить до минимума возможность ошибки.

Цель отбора персонала заключается в выборе работника для определенного рабочего места с помощью тестов или оценок, которые позволяют сравнивать качества кандидатов.

Следует иметь в виду, что занятость на предприятии позволяет работающему сочетать как материальную заинтересованность, так и нематериальную. Кандидат стремится получить вознаграждение, которое позволит ему удовлетворять собственные нужды и нужды семьи, и, кроме того, осуществлять трудовую деятельность, приносящую максимальное удовлетворение или минимальные неудобства. Речь идет о стремлении к получению достаточной экономической компенсации и к достижению наибольшей степени проявления личности. Решение занять какого-либо человека на предприятии в большинстве случаев носит повторяющийся характер, и поэтому целесообразно разработать общую политику найма с помощью плана, который бы позволил соотнести людские ресурсы с целями предприятий.

Наем на работу имеет особенности, связанные с временным или постоянным ее характером. Временная занятость связана с такими особенностями, как сезонное увеличение производства продукции вследствие сезонных или пиковых распродаж, а также из-за необходимости покрыть временное понижение цен, вызванное внешними или внутренними причинами. Очевидно, что потребности во временном или постоянном персонале имеют разное значение и соответствующий персонал должен иметь разную квалификацию. Среди причин, вызывающих потребность в найме постоянного персонала, выделяются происходящие на предприятии технические изменения, понимаемые в широком смысле, включая как экономический, так и технологический аспекты, а также изменения, связанные со структурной реорганизацией или заменой оборудования на новейшее, что приводит к необходимости найма персонала, соответствующего новым задачам.

При этом следует учитывать, что существует отношение, которое требуется оптимизировать и которое включает эффективность труда и затраты по его использованию. Для количественной оценки отношения «затраты—эффективность» необходимо уметь оценивать специфику рабочего места и уровень требований к каждому заданию с целью сравнения качеств кандидатов. Необходимость дифференциации требований применительно к заданию приводит к мысли о возможности использования для анализа и решения задачи теории нечетких множеств.

7.2. Базовые схемы для оптимального отбора

По своей природе схемы, используемые при отборе персонала, не лишены субъективности и представляют собой последовательность этапов, на которых отсеиваются кандидаты, считающиеся наименее подходящими. Одновременно оцениваются качества, необходимые для осуществления операций, определяемых местом будущей работы. Эти этапы можно охарактеризовать следующим образом.

1. Определение специфики рабочего места посредством анализа поручаемых задач и объективных возможностей для их осуществления. Важно, что при этом определяются не только методы, которые должны быть использованы при отборе, но и возрастает уровень понимания возлагаемых на работающего задач. Кроме того, предполагается перечисление качеств, которыми должен обладать кандидат для правильного осуществления будущей деятельности на необходимом уровне. На практике обычно устанавливается перечень необходимых качеств с тем, чтобы более глубоко проанализировать наиболее важные. Для этого изучаются операции, осуществляемые на рабочем месте, а также условия, в которых реализуются

задания. Часто сами работающие на предприятии информируют об особенностях мест при осуществлении определенной деятельности. При этом фиксируются результаты, получаемые работающими, качества которых известны. После описания специфики работы и критериев отбора необходимо сформировать тесты для отбора кандидатов.

2. Разработка анкеты поступающего. Речь идет о заполняемой кандидатом форме, где отображены его личные данные, предыдущая профессиональная деятельность, а также сведения об образовании, связанные с потребностями предприятия. Цель заключается в получении общей информации о каждом из кандидатов, отделяя при этом тех, которые явно не отвечают минимальным требованиям.

3. Проведение собеседования. Цель собеседования состоит в проверке представленных и полученных из других источников сведений и расширении информации о каждом из кандидатов. Кроме того, собеседование позволяет кандидату познакомиться с предприятием и предстоящей деятельностью, а также получить реальное представление о среде, где предстоит вращаться в случае принятия. Речь идет о первом личном контакте кандидата с представителями предприятия. Важность этого этапа определяется уровнем субъективности, которая отмечается в любом собеседовании. По способу проведения и содержанию собеседования необходимо организовывать так, чтобы уменьшить субъективность. Говорят о направленном собеседовании, когда ведущий направляет беседу, и о ненаправленном, когда кандидату предоставляется свобода действий; о собеседованиях в форме давления или совета; собеседованиях индивидуальных или коллективных и т.д. В любом случае на этом этапе должны появляться новые сведения для решения вопроса об отсеве претендентов.

4. Решение о принятии на работу нового персонала основывается на тестах, которым подвергаются кандидаты для определения соответствия рабочему месту, которое предстоит занять. Имеются разнообразные тесты, которые позволяют оценить количественно уровень квалификации кандидатов и некоторые качества, считающиеся необходимыми для выполнения определенных задач. После того, как такие уровни определятся, их сравнивают с теоретическими значениями. Для оценки способности кандидатов разработаны многочисленные виды тестов. Имеются тесты общего вида, дополняемые другими, связанными с оценкой специфических качеств. Среди них можно упомянуть тесты по определению умственных способностей по шкале Бине Симона, шкале Александера, тесту Отиса и другие. Также известны тесты, направленные на оценку таких факторов как устное понимание, способность к вычислениям, абстрактное мышление и т. п., а также тест на вращение фигур, на развертывание площадей, тест прогрессивных матриц Равена, тест кубов Коса и т. д. Другие тесты направлены на «измерение» памяти (шкала Веншлера, шкала Велса и т. д.), а также на оценку механического понимания, внимания, восприятия и многое другое. В общем, основной целью этих тестов является попытка количественно определить качества, которыми обладает кандидат для выполнения определенных конкретных задач. Задача в том, как объединить результаты

применяемых тестов. Для этого предложено большое количество методов, каждый из которых претендует на наибольшую объективность, и выбрать лучший из них сложно. Ниже рассмотрим подход, который основан на предположении о нечеткости данных.

В такой схеме, как обычно, после определения характеристик рабочего места анализируются качества кандидата для последующего сравнения тех и других. Для рабочих мест перечисляются виды деятельности с целью определения относительной важности каждого из них. После такой основной спецификации устанавливается весовой коэффициент в соответствии с важностью каждого вида деятельности относительно каждого конкретного рабочего места. Для каждого вида деятельности, в свою очередь, оцениваются качества и способности кандидата с помощью оценки от 0 до 1, так, чтобы большая способность получала большую оценку. Это позволяет установить балльную оценку, взвешивая полученные значения для каждого из видов деятельности по предварительно определенному весу, и осуществить сравнение всех кандидатов. Поскольку идеальная характеристика соответствует 1, будет выбран тот, кто получит количество баллов, наиболее близкое к 1. При таком подходе наиболее близкой к действительности будет оценка данных как нечетких подмножеств и использования для их обработки соответствующих методов. Действительно, если для каждого из видов деятельности на рабочем месте задать значения, расположенные между 0 и 1, то, имея в виду субъективность таких оценок, можно систематизировать эти и им подобные схемы, чтобы их можно было рассматривать как нечто пригодное для числовых преобразований.

В ходе совершенствования методов отбора персонала были разработаны и использованы схемы, построенные на методах многовариантного анализа, что позволило расширить рамки исследований в этой области. Однако в соответствии с целью данной работы мы ограничимся подробным изложением только простой схемы на основе теории нечетких множеств.

7.3. Оценка персонала с помощью нечетких множеств

Оценка возможностей персонала для выполнения определенных задач или для его ориентации на другие задачи является важной проблемой для предприятия. Поскольку речь идет о многокритериальной проблеме с детерминированными нечеткими данными, она подпадает под действие теории нечетких множеств. Предположим, что существует 7 видов деятельности

$$\xi = \{A, B, C, D, E, F, G\} \tag{7.1}$$

и эксперту по отбору задают вопрос об оценке качеств кандидата относительно каждого из 7 видов деятельности, выражаемых десятичными дробями от 0 до 1. Отметим, что некоторые виды оценки будут иметь субъективный характер, в то время как другие могут быть измеримыми.

Несмотря на это, они должны расположиться на одной и той же шкале. Таким образом, значение, которое дается квалификацией кандидата p, будет обозначаться нечетким подмножеством из интервала [0, 1], например

(7.2)

	A	B	C	D	E	F	G
$\underset{\sim}{P}$ =	0.8	1	0	0.4	0.7	0.3	0.8

Представим, что на месте работы t требуются различные уровни квалификации для каждого из видов деятельности ξ. Эти уровни квалификации также образуют нечеткое подмножество

(7.3)

	A	B	C	D	E	F	G
$\underset{\sim}{T}$ =	0.5	1	0.8	1	1	0.4	0

Построим коэффициент адекватности p относительно t следующим образом. Если

(7.4) Если $\mu_{\underset{\sim}{P}}(x) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{T}}(x)$,

то запишем $K_x\ (p \rightarrow t) = 1$.
Если

(7.5) Если $\mu_{\underset{\sim}{P}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{T}}(x)$,

то запишем $K_x\ (p \rightarrow t) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{T}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$

или в более общей форме

$$K_x\ (p \rightarrow t) = 1 \wedge (1 - \mu_{\underset{\sim}{T}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{P}}(x)).$$

Так, применяя (7.4) и (7.5) к (7.2) и (7.3), получаем коэффициент адекватности $K(p,t)$ как результат суммирования $K_x\ (p \rightarrow t)$ и деления суммы на мощность ξ для получения числа в отрезке [0, 1]:

(7.6) $$K\ (p,t) = \frac{1+1+0.2+0.4+0.7+0.9+1}{7} = 0.742\ .$$

Эта система оценки не имеет в виду необыкновенные возможности кандидатов. Возможно, что какое-либо рабочее место не потребует какой-либо квалификации для деятельности (например, $\mu_T(G) = 0$). Предположим, что необходимо отобрать n кандидатов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ для рабочего места t. Для каждого кандидата получаем $K(p_i, t)$ и выбираем того, который получит наиболее высокий коэффициент адекватности. Пусть, например, для 6 кандидатов и рабочего места, заданного (7.3), определены

(7.7)

	A	B	C	D	E	F	G	
$\underset{\sim}{P}_1 =$	0	0.8	1	1	0.4	0	0.3	,
$\underset{\sim}{P}_2 =$	0.2	0.9	0.6	0.4	1	1	0.5	,
$\underset{\sim}{P}_3 =$	0.3	0.9	0.7	1	1	0.2	0	,
$\underset{\sim}{P}_4 =$	0.5	1	1	0.4	0.8	0.6	1	,
$\underset{\sim}{P}_5 =$	0.3	0.2	1	1	0	0.4	0	,
$\underset{\sim}{P}_6 =$	0.7	0.8	1	1	0.9	0	0.8	.

Тогда получаем:

$$
(7.8) \qquad \begin{cases}
K(p_1, t) = \dfrac{0.5 + 0.8 + 1 + 1 + 0.4 + 0.6 + 1}{7} = 0{,}75 \,, \\[2ex]
K(p_2, t) = \dfrac{0.7 + 0.9 + 0.8 + 0.4 + 1 + 1 + 1}{7} = 0.82 \,, \\[2ex]
K(p_3, t) = \dfrac{0.8 + 0.9 + 0.9 + 1 + 1 + 0.8 + 1}{7} = 0.91 \,, \\[2ex]
K(p_4, t) = \dfrac{1 + 1 + 1 + 0.4 + 0.8 + 1 + 1}{7} = 0.88 \,, \\[2ex]
K(p_5, t) = \dfrac{0.8 + 0.2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1}{7} = 0.71 \,, \\[2ex]
K(p_6, t) = \dfrac{1 + 0.8 + 1 + 1 + 0.9 + 0.6 + 1}{7} = 0.90 \,.
\end{cases}
$$

Отсюда делается вывод, что кандидат p_3 наилучшим образом соответствует рабочему месту по критериям, указанным в (7.4) и (7.5).

Можно отметить, что кандидат, который по (7.4) соответствует всем видам деятельности, получит K = 1, в то время как имеющий 0 по всем видам деятельности получит минимально возможную оценку :

$$\frac{0.5+0+0.2+0+0+0.6+1}{7}=0.32 \quad (7.9)$$

Такой подход позволяет сделать следующие замечания.

1. Рабочее место, не требующее никакой квалификации ($\mu=0$ для всех видов деятельности), и кандидат, который не обладает никакой квалификацией ($\mu=0$), получат K=1, в то время, как кандидат, имеющий $\mu>0$ в разных видах деятельности, получит меньшие K для этой работы. Этот результат неудивителен, поскольку для работы, не требующей квалификации, лучше всего подходит человек, не имеющий квалификации.

2. Критерий (7.4), (7.5) дает K=1 любому человеку, уровень квалификации которого не меньше требуемого уровня квалификации μ по видам деятельности. Рабочее место, требующее абсолютной компетенции кандидата, будет иметь $\mu=1$ во всех видах деятельности. Тогда критерий (7.4), (7.5) указывает, что достаточно взять μ кандидата, получить их сумму и затем разделить ее на 7 (или на мощность ξ в общем случае). Избранный критерий допускает, что тот, кто способен на многое, способен и на малое.

3. С другой стороны, такое нечеткое множество, как (7.3), показывает уровень специализации, который требуется для каждого из видов деятельности. Тогда можно утверждать, что рабочее место t предполагает более высокие требования к квалификации, чем место t′, если $\underset{\sim}{T} \supset \underset{\sim}{T}'$.

Также можно рассмотреть другой критерий, использующий нечеткие множества, который заключается в том, чтобы максимально приблизиться к определенному контуру посредством уровней. Для этого предположим, что известен контур компетенций $\underset{\sim}{C}$ с исходным множеством ρ:

$$\rho = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad (7.10)$$

(7.11) $\underset{\sim}{C}$ =

a	b	c	d	e	f
0.7	1	0.4	0.9	1	0.5

.

Предположим, что имеется 5 кандидатов и через усреднение оценок возможностей каждого из них получены следующие нечеткие множества.

(7.12)

	a	b	c	d	e	f	
$\underset{\sim}{A}_1 =$	0.8	1	0.3	0	0.7	1	,
$\underset{\sim}{A}_2 =$	0.2	0.8	1	0.7	0.6	0.3	,
$\underset{\sim}{A}_3 =$	0.5	0.5	0.9	0.3	1	1	,
$\underset{\sim}{A}_4 =$	1	0.9	0.5	0.6	0.8	0.4	,
$\underset{\sim}{A}_5 =$	0.4	0.5	0.3	1	0.3	0.2	.

Можно перейти к определению «различия», существующего между каждым из кандидатов и необходимого для рабочего места, уровни которого определены контуром компетенции. Это потребует сравнения двух подмножеств одного и того же исходного множества с помощью математического понятия расстояния.

Для определения расстояния между подмножествами могут использоваться различные формулы,и соответственно для одной и той же задачи будут получены различные результаты. Одна из таких формул, задающая так называемое расстояние Хемминга, использует различие между элементами двух подмножеств (обычных или нечетких). Если взять «относительное расстояние Хемминга», т.е. сумму модулей разности соответствующих элементов подмножеств, деленную на 6 (мощность ρ),для каждого $\underset{\sim}{A}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, в виде

(7.13) $$\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} \Sigma \mid \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x) - \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \mid, \qquad x \in \rho ,$$

то получим для каждого кандидата :

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (\mid 0.8-0.7 \mid + \mid 1-1 \mid + \mid 0.3-0.4 \mid +$$
$$+ \mid 0-0.9 \mid + \mid 0.7-1 \mid + \mid 1-0.5 \mid) = 0.31 ,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 0.2—0.7 | + | 0.8—1 | + | 1—0.4 | + | 0.7—0.9 | + | 0.6—1 | + | 0.3—0.5 |) = 0.35 ,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 0.5—0.7 | + | 0.5—1 | + | 0.9—0.4 | + | 0.3—0.9 | + | 1—1 | + | 1—0.5 |) = 0.38 ,$$

(7.14) $$\delta(\underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 1—0.7 | + | 0.9—1 | + | 0.5—0.4 | + | 0.6—0.9 | + | 0.8—1 | + | 0.4—0.5 |) = 0.18 ,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_5, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 0.4—0.7 | + | 0.5—1 | + | 0.3—0.4 | + | 1—0.9 | + | 0.3—1 | + | 0.2—0.5 |) = 0.33 .$$

Этим самым кандидаты упорядочиваются по убыванию их «близости» к контуру компетентности :

(7.15) $$\underset{\sim}{A}_4 \succ \underset{\sim}{A}_1 \succ \underset{\sim}{A}_5 \succ \underset{\sim}{A}_2 \succ \underset{\sim}{A}_3 .$$

Отметим, что если используется другое понятие расстояния, возможно, что такое упорядочивание будет другим. Второй интересный вопрос возникает, если требуется определить «близость» между возможностями каждого из кандидатов с каждым и перегруппирования между собой. Для этого прежде всего находят расстояние Хемминга между $\underset{\sim}{A}_i$ и $\underset{\sim}{A}_j$, i,j = 1,2,3,4,5:

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2) = \frac{1}{6} (| 0.8—0.2 | + | 1—0.8 | + | 0.3—1 | + | 0—0.7 | + | 0.7—0.6 | + | 1—0.3 |) = 0.50 ,$$

(7.16) $$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_3) = \frac{1}{6} (| 0.8—0.5 | + | 1—0.5 | + | 0.3—0.9 | + | 0—0.3 | + | 0.7—1 | + | 1—1 |) = 0.33 ,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_4) = 0.30, \quad \delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_5) = 0.51, \quad \delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_3) = 0.36,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_4) = 0.30, \quad \delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_5) = 0.31, \quad \delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_4) = 0.40,$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_5) = 0.48, \quad \delta(\underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{A}_5) = 0.38 .$$

Очевидно, что $\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = 0$, когда $i = j$. Получаем следущее нечеткое отношение

(7.17)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	0	0.50	0.33	0.30	0.51
A_2	0.50	0	0.36	0.30	0.31
A_3	0.33	0.36	0	0.40	0.48
A_4	0.30	0.30	0.40	0	0.38
A_5	0.51	0.31	0.48	0.38	0

Эта матрица расстояний является матрицей «неподобия». Дополнение ее элементов до 1 дает матрицу «подобия»:

(7.18)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0.50	0.67	0.70	0.49
A_2	0.50	1	0.64	0.70	0.69
A_3	0.67	0.64	1	0.60	0.52
A_4	0.70	0.70	0.60	1	0.62
A_5	0.49	0.69	0.52	0.62	1

Найдем сейчас максимальные подотношения сходства для всех уровней α,соответствующих значениям матрицы (7.18). Для этого воспользуемся алгоритмом Пиче *. Для упрощения записей примем

(7.19) $A_1 = a,\ A_2 = b,\ A_3 = c,\ A_4 = d,\ A_5 = e.$

---

* Изложен, например, в [8] *.(Прим. ред. перевода.)*

При уровне $\alpha = 1$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1				
b		1			
c			1		
d				1	
e					1

$$\begin{array}{c|c|} & a \\ \hline a & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & b \\ \hline b & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & c \\ \hline c & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & d \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & e \\ \hline e & 1 \\ \hline \end{array}$$

При уровне $\alpha = 0.70$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1			1	
b		1		1	
c			1		
d	1	1		1	
e					1

$$\begin{aligned} S &= (a \dot{+} bce)\ (b \dot{+} ce)\ (c \dot{+} de)\ (d \dot{+} e) = \\ &= (ab \dot{+} ace \dot{+} bce)\ (c \dot{+} de)\ (d \dot{+} e) = \\ &= (abc \dot{+} abde \dot{+} ace \dot{+} bce \dot{+} bcde)\ (d \dot{+} e) = \\ &= abcd \dot{+} abce \dot{+} abde \dot{+} acde \dot{+} ace \dot{+} bcde \dot{+} bce\ , \\ S' &= e \dot{+} d \dot{+} c \dot{+} b \dot{+} bd \dot{+} a \dot{+} ad = \\ &= ad \dot{+} bd \dot{+} e \dot{+} c\ , \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} & a & d \\ \hline a & 1 & 1 \\ \hline d & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|} & b & d \\ \hline b & 1 & 1 \\ \hline d & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & e \\ \hline e & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & c \\ \hline c & 1 \\ \hline \end{array}$$

При уровне $\alpha = 0.69$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1			1	
b		1		1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$\begin{aligned} S &= (a \dot{+} bce)\ (b \dot{+} c)\ (c \dot{+} de)\ (d \dot{+} e) = \\ &= (ab \dot{+} ac \dot{+} bce)\ (c \dot{+} de)\ (d \dot{+} e) = \\ &= (abc \dot{+} abde \dot{+} ac \dot{+} acde \dot{+} bce \dot{+} bcde)\ (d \dot{+} e) = \\ &= abcd \dot{+} abce \dot{+} abde \dot{+} acd \dot{+} ace \dot{+} acde \dot{+} bcde \dot{+} bc\ , \\ S' &= e \dot{+} d \dot{+} c \dot{+} be \dot{+} bd \dot{+} b \dot{+} a \dot{+} ad = \\ &= be \dot{+} bd \dot{+} ad \dot{+} c\ , \end{aligned}$$

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	d
b	1	1
d	1	1

	b	e
b	1	1
e	1	1

	c
c	1

При уровне $\alpha = 0.67$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1		1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$
\begin{aligned}
S &= (a \dotplus be)\ (b \dotplus c)\ (c \dotplus de)\ (d \dotplus e) = \\
&= (ab \dotplus ac \dotplus be \dotplus bce)\ (c \dotplus de)\ (d \dotplus e) = \\
&= (abc \dotplus abde \dotplus ac \dotplus acde \dotplus bce \dotplus bde)\ (d \dotplus e) = \\
&= abcd \dotplus abce \dotplus abde \dotplus acd \dotplus ace \dotplus acde \dotplus bcde \dotplus \\
&\dotplus bc \dotplus bde\ , \\
S' &= e \dotplus d \dotplus c \dotplus be \dotplus bd \dotplus b \dotplus a \dotplus ad \dotplus ac = \\
&= be \dotplus bd \dotplus ad \dotplus ac\ ,
\end{aligned}
$$

	a	c
a	1	1
c	1	1

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	d
b	1	1
d	1	1

	b	e
b	1	1
e	1	1

При уровне $\alpha = 0.64$имеем :

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$
\begin{aligned}
S &= (a \dotplus be)\ (c \dotplus de)\ (d \dotplus e) = \\
&= (ac \dotplus ade \dotplus bce \dotplus bde)\ (d \dotplus e) = \\
&= acd \dotplus ace \dotplus ade \dotplus bcde \dotplus bce \dotplus bde\ , \\
S' &= be \dotplus bd \dotplus bc \dotplus a \dotplus ad \dotplus ac\ ,
\end{aligned}
$$

	a	c
a	1	1
c	1	1

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

	b	d
b	1	1
d	1	1

	b	e
b	1	1
e	1	1

При уровне a = 0.62 имеем :

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1		
d				1	1
e					1

$$S = (a \dot{+} be)\ (c \dot{+} de) =$$
$$= ac \dot{+} ade \dot{+} bce \dot{+} bde\ ,$$
$$S' = bde \dot{+} bc \dot{+} ad \dot{+} ac\ ,$$

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

	a	c
a	1	1
c	1	1

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

При уровне $\alpha = 0.60$имеем :

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	
d				1	1
e					1

$$S = (a \dot{+} be)\ (c \dot{+} e) =$$
$$= ac \dot{+} ae \dot{+} bce \dot{+} be\ ,$$
$$S' = bde \dot{+} bcd \dot{+} ad \dot{+} acd\ ,$$

	a	c	d
a	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	b	c	d
b	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

При уровне $\alpha = 0.52$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	1
d				1	1
e					1

$S = a \dotplus be$,

$S' = bcde \dotplus acd$,

	b	c	d	e
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
e	1	1	1	1

	a	c	d
a	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

При уровне $\alpha = 0.50$ имеем :

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	1
d				1	1
e					1

$S = a \dotplus e$,

$S' = bcde \dotplus abcd$,

	b	c	d	e
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
e	1	1	1	1

	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1

При $\alpha = 0.49$ остается только одно максимальное подотношение сходства.

Это постепенно развивающееся разложение на составные части приобретает особый интерес, когда желательно выделить сходство, существующее между кандидатами, для организации групп на курсах подготовки. Так, можно видеть, что при высоком уровне, например 0.7, A_1 и A_4,с одной стороны, A_2 и A_4, с другой, очень сходны, тогда как A_1 и A_2 — не сходны. Нужно довести уровень до 0.5 для того, чтобы объединить вместе A_1, A_2 и A_4. Осуществление разложения на составные части при максимальных подотношениях приобретает особый интерес в области наук о человеческих отношениях.

Рассмотрим сейчас на примере, как можно использовать разносторонность персонала для осуществления определенных видов деятельности. Пусть имеются четыре различные работы. Для каждой из них требуются профессиональные особенности из исходного множества

$$\xi_1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \tag{7.20}$$

так что

(7.21)

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\underset{\sim}{T}_1$ =	0.8	0.3	0.1	1	0.4	0.6	1	1
$\underset{\sim}{T}_2$ =	0.2	0.3	0.5	0.6	1	1	1	0.4
$\underset{\sim}{T}_3$ =	0.9	0.8	0.1	0.4	0.5	0.8	0.2	0.3
$\underset{\sim}{T}_4$ =	1	1	0.4	1	0.2	0	0.3	1

Пусть, далее, имеется пять кандидатов и оценены их возможности по отношению к качествам A,B,C,..., т.е. заданы

(7.22)

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\underset{\sim}{P}_1$ =	1	0.3	0.8	0	0.4	0.6	0.5	0.7
$\underset{\sim}{P}_2$ =	0.6	1	0.4	0.5	1	0	0.5	0.6
⋮								

$$\underset{\sim}{P}_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0.8 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.7 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$\underset{\sim}{P}_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0.6 & 0.3 & 1 & 1 & 0 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ \hline \end{array},$$

$$\underset{\sim}{P}_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0.9 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.9 & 0.4 \\ \hline \end{array}.$$

Найдем расстояния Хемминга для каждого из них относительно работ. Получим следующую матрицу:

(7.23)

	$\underset{\sim}{T}_1$	$\underset{\sim}{T}_2$	$\underset{\sim}{T}_3$	$\underset{\sim}{T}_4$
$\underset{\sim}{P}_1$	0.33	0.43	0.33	0.42
$\underset{\sim}{P}_2$	0.47	0.37	0.35	0.28
$\underset{\sim}{P}_3$	0.16	0.33	0.38	0.40
$\underset{\sim}{P}_4$	0.23	0.38	0.51	0.42
$\underset{\sim}{P}_5$	0.27	0.15	0.27	0.51

Для того чтобы подобрать кандидатам работы, к которым они наиболее пригодны, поступим следующим образом. Для $\delta(\underset{\sim}{P}_5 \to \underset{\sim}{T}_2) = 0.15$ выберем P_5 для T_2 и в матрице (7.23) удалим столбец $\underset{\sim}{T}_2$ и строку $\underset{\sim}{P}_5$.

Для $\delta(\underset{\sim}{P}_3 \to \underset{\sim}{T}_1) = 0.16$ выбираем P_3 для T_1 и удаляем столбец $\underset{\sim}{T}_1$ и строку $\underset{\sim}{P}_3$. Для $\delta(\underset{\sim}{P}_2 \to \underset{\sim}{T}_4) = 0.28$ выбираем P_2 для T_4 и удаляем столбец $\underset{\sim}{T}_4$ и строку $\underset{\sim}{P}_2$. И, наконец, выбираем P_1 для T_3 из-за $\delta(\underset{\sim}{P}_1 \to \underset{\sim}{T}_3) = 0.33$. Не будет занят P_4. Соответствующая матрица назначений имеет вид

(7.24)

	$\underset{\sim}{T}_1$	$\underset{\sim}{T}_2$	$\underset{\sim}{T}_3$	$\underset{\sim}{T}_4$
$\underset{\sim}{P}_1$			1	
$\underset{\sim}{P}_2$				1
$\underset{\sim}{P}_3$	1			
$\underset{\sim}{P}_4$				
$\underset{\sim}{P}_5$		1		

Существуют и другие способы назначений. Среди них назовем известный в исследовании операций точный «венгерский метод», который обеспечивает оптимальное назначение с минимальным суммарным расстоянием. Интересно, что назначение (7.24) для приведенного примера дает сумму расстояний $0.15 + 0.16 + 0.28 + 0.33 = 0.92$, случайно совпадающую с минимумом, который можно было бы получить при использовании венгерского метода.

Другая важная задача — это вопрос о «неспециализации», т.е. определение кандидата, наиболее подходящего для всех видов деятельности (7.21). Для этого найдем объединение всех $\underset{\sim}{T}_i$:

(7.25) $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}_1 \cup \underset{\sim}{T}_2 \cup \underset{\sim}{T}_3 \cup \underset{\sim}{T}_4 =$

A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	0.5	1	1	1	1	1

Вычислим:

$\delta(\underset{\sim}{P}_1 \to \underset{\sim}{T}) = 0.47$, $\delta(\underset{\sim}{P}_2 \to \underset{\sim}{T}) = 0.36$, $\delta(\underset{\sim}{P}_3 \to \underset{\sim}{T}) = 0.35$,

$\delta(\underset{\sim}{P}_4 \to \underset{\sim}{T}) = 0.40$, $\delta(\underset{\sim}{P}_5 \to \underset{\sim}{T}) = 0.28$.

Отсюда делаем вывод, что наиболее пригодным для разносторонней деятельности является кандидат P_5.

Существуют другие задачи в этой связанной с человеческим фактором области, для решения которых могут быть применены подобные схемы. При этом могут быть использованы все нечеткие операторы, будь то алгебраические или семантические.

ГЛАВА 8. ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ ПО ДАННЫМ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА

8.1. Баланс как показатель финансово-экономического состояния предприятия

Важность, которую приобретают процессы качественной оценки экономических явлений для управления предприятием, подчеркивает интерес к данным, предоставляемым бухгалтерской отчетностью для контроля и оценки экономической деятельности предпринимателя. Подход к реальным проблемам предприятия не может осуществляться независимо от данных, призванных служить основой для расчетов. Именно поэтому расчетные понятия и методы эффективны для описания ситуаций, складывающихся на предприятиях.

Среди средств бухгалтерского учета, использование которых существенно при управлении предприятием, главным оказывается баланс. С помощью различных теорий делались попытки дать полное объяснение целей, которые преследуются при составлении баланса. При этом во всей теории среди понятий, используемых при управлении предприятием, включается понятие равновесия. Ситуация равновесия возникает изначально с установлением количественного равенства между финансовой и экономической структурами как выражение источника финансирования при их реализации.

Для проведения сравнений, устанавливающих частичное равновесие или неравновесие, счета упорядочиваются в соответствии с определенным критерием: для финансовой структуры по возрастанию востребованности таким образом, что в первую очередь располагаются собственные источники финансирования, а потом чужие. Параллельным образом располагаются счета экономической структуры в порядке возрастания реалиэуемости, причем на первом месте располагается недвижимость, далее реализуемый долгосрочный и, наконец, непосредственно наличный активы. Счет как основа финансово-экономического анализа предприятия является отражением перемещений элемента, совокупностей элементов или масс собственности, влияющих на определенные предварительно охарактеризованные статьи расходов, которые поддаются проверке впоследствии.

Анализ финансовой деятельности предприятия обычно осуществляется двумя путями: или посредством развития балансов счетов результатов; или посредством утверждения и последующей оценки «относительных показателей». Оба пути не являются исчерпывающими. Подобный анализ не всегда ограничивается определением текущей ситуации, а является попыткой с помощью известных данных определить действия, направленные на достижение будущего состояния, оцениваемого в терминах определенности, вероятности или неопределенности. Для этого прежде всего изучаются имеющиеся в распоряжении балансы за определенный период с тем, чтобы потом сравнить с ними полученные за тот же период результаты и составляющие их элементы, и, наконец, установить состояние начала и применения фондов. С методологической точки зрения анализ баланса представляет вариант статического исследования, направленного на то, чтобы как можно вернее отразить положение предприятия в определенный момент. Сравнение балансов, относящихся к различным моментам времени, является исследованием сравнительной статистики, которая устанавливает, что произошло в промежутках между двумя моментами.

Такой анализ позволяет оценить действия, происходившие в рассмотренные периоды, и их экономические последствия: почему пришлось прибегнуть к кредиту, почему увеличились запасы, почему сократилась наличность, каковы были амортизационные отчисления и т.п. Подобная информация может помочь в определении политики на будущее, которая бы поставила цели и наметила желаемый баланс на очередной хозяйственный год. Одновременно с этим могут быть получены различные выводы относительно предприятий, балансы которых за тот же самый период времени оказываются сходными и их развитие к настоящему моменту показывает, имеют ли эти предприятия тенденцию к росту или сокращению. Таким образом, основная цель анализа прошлых ситуаций — попытка оценить наилучшим образом будущие данные. Однако в экономических исследованиях с характерным для них отсутствием информации, относящейся к будущему, такие прогнозы не могут быть оценены ни в терминах определенности, ни даже в вероятностных терминах. Отсюда стремление использовать способы, применимые в области неопределенности.

Существуют различные критерии для группировки имущественных элементов, при которых по-разному составляются актив и пассив. Для иллюстрации приведем пример таких возможностей в виде схем, на которых размеры площадей соответствуют величинам относительной важности групп, составляющих баланс (см. стр. 140).

Анализ баланса сам по себе не дает никакой информации о формировании результатов каждого бюджетного года, поскольку они отражаются только в единственном счете прибыли и убытков. Поэтому исследование материального баланса дополняется сравнением на протяжении какого-то времени элементов, образующих результат каждого бюджетного года.

С другой стороны, развитие, отмечаемое для каждой из масс собственности, дает сравнительные изменения в общей их совокупности относительно полной суммы экономической и финансовой структуры. Однако простое изучение этих изменений, без связей с происходящими в остальных, оказывается недостаточным для качественного управления предприятием. Поэтому их следует анализировать, учитывая взаимосвязь между ними. Изменения происходят как в источнике фондов, т.е. в пассиве, так и в использовании этих фондов, т.е. в активе. Очевидно, что оба вида изменений должны уравновешиваться.

СХЕМА 1

СХЕМА 2

Если, например, актив образован четырьмя массами собственности A_1, A_2, A_3, A_4 и пассив — P_1, P_2, P_3, P_4, то сумма изменений актива должна быть равной сумме изменений пассива:

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4 = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4.$$

Отсюда

$$\Delta A_1 = (\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4) — (\Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4)$$

и $$\Delta P_1 = (\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4) - (\Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4).$$

Таким образом, для получения величины изменения в какой-либо одной массе собственности необходимо определить изменения, происходящие в остальных с целью установления движений, происшедших в анализируемой массе.

Поскольку пассив баланса является источником финансовых средств и актив — его применением, то можно утверждать, что любое увеличение массы пассива или уменьшение массы актива представляет собой источник финансирования, в то время как уменьшение массы пассива или увеличение массы актива ведет к размещению этих финансовых средств.

Представленные схемы только частично применимы для оценки будущих ситуаций вследствие постоянного развития предпринимательства. Данные, накопленные за определенный период, недостаточны для обоснованного прогноза. Экономическая действительность предприятия ставит целый ряд задач, которые не могут быть решены обычными бухгалтерскими методами из-за нехватки соответствующих подходов к их решению. Классические методы в области микроэкономики, основанные на дифференциальном исчислении и маргинальном анализе, становятся все менее значимыми в свете развития новых экономико-расчетных подходов к предпринимательской деятельности. Использование принципов современной статистики в бухгалтерском учете открыло новые полезные перспективы для решения старых задач. Это явилось причиной выхода исследований в область вероятностей, так чтобы развитие «системы» во времени описывалось вероятностными данными и дискретными процессами. В последние годы для решения задач управления предприятием в целом и в исчислимых прогнозах, получаемых на основе бухгалтерского учета, нашла применение теория нечетких множеств.

8.2. Относительные показатели при управлении предприятием

Представление баланса посредством масс собственности позволяет соотнести источники финансирования с направлением их использования. Но роль таких отображений не заканчивается анализом происшедших событий или изучением текущей ситуации. Цель состоит в построении прогноза будущих ситуаций посредством оценки масс собственности для последующих периодов. Установление относительных показателей для прошедших моментов должно позволить найти относительные показатели, характеризующие будущие ситуации с тем, чтобы уточнить желаемые цели и в большей мере способы их достижения.

Касаясь финансово-экономической деятельности предприятия, можно ставить вопросы о связи между массами актива и пассива. Так, можно указать на связь, существующую между основным капиталом и источниками, из которых ведется его финансирование. Существуют общепринятые правила, связывающие источники финансирования с направлением их применения. Так, утверждают, что нецелесообразно проводить финансирование основного капитала с помощью краткосрочных ссуд. Приобретение оборудования, зданий и сооружений как составляющих основного капитала должно финансироваться из постоянного фонда иммобилизации, где слово «постоянный» имеет относительный характер. Это является следствием недостаточной способности фонда иммобилизации превращаться в денежные средства, т. е. из-за недостаточной степени ликвидности.

Метод относительных показателей позволяет следить за финансово-экономическим развитием предприятий с помощью установления отношений между различными массами собственности или элементами, образующими итоговый счет. Однако его полезность относится не к анализу баланса и итоговому счету, а к эффективному использованию таких секторов предприятий, как производственный, сбыта, кадров и др.

Его применение в качестве средства измерения направлено не только на улучшение управления, но и преследует такую цель, как налоговое инспектирование предприятий, для которого относительные показатели превратились в определяющий элемент обоснованности или адекватности представленных счетов.

Для правильного использования этих методов нужно принимать во внимание необходимость определенного нормирования, обеспечивающего достижение однородных сравнений. Должны быть установлены постоянные критерии оценки для относительных показателей одного и того же предприятия в различные периоды: данные, составляющие эти показатели, должны описывать одинаковые периоды каждого года и т.п.

Относительный показатель, рассматриваемый изолированно от других, дает весьма относительную пользу. Интереснее осуществить сравнительные исследования нескольких показателей. Поэтому обычно вычисляется несколько относительных показателей по данному предприятию в какие-то моменты времени и затем результаты сравниваются за несколько периодов для прослеживания их эволюций. При необходимости также сравниваются относительные показатели одного предприятия с другими или со стандартами, которые считаются правильными, для оценки места данного предприятия среди других.

Если взять за основу баланс и итоговый счет, можно разработать большое число относительных показателей для оценки качества осуществляемого управления в будущем. В соответствии с целями данной работы выберем из большого количества возможных относительных показателей только несколько наиболее используемых.Они распределяются по нескольким группам. В первом приближении можно сказать, что существуют структурные относительные показатели и управленческие. Первые анализируют финансовую и экономическую структуру, а вторые — финансовое и экономическое управление. Такая классификация общепризнана, но она не является единственной. Иногда говорят о структурных показателях, которые соотносят балансовые массы между собой, оборотных показателях, соединяющих разные массы баланса со сбытом, показателях финансово-экономических результатов. Среди наиболее используемых структурных относительных показателей выделяются те, которые соединяют источники финансирования с направлением применений. Так, например, краткосрочные кредиты оказываются подходящими для финансирования таких факторов производства, которые длятся в течение коротких промежутков времени. При этом общепринятое правило гласит, что средства, используемые при финансировании масс собственности актива, должны оставаться в распоряжении предприятия в течение времени, которое превышает уровень их наличия. Поэтому оборотный капитал должен превышать краткосрочные обязательства, т.е. относительный показатель —

$$\frac{\text{оборотный капитал}}{\text{краткосрочные обязательства}}$$

будет в этом случае больше, чем единица. Эволюция этого показателя во времени позволяет определить не только финансовый потенциал предприятия, но и степень стабильности в ближайшем будущем. Если это частное превышает единицу, образуется гарантированная прибыль, которую обычно называют «фонд маневрирования нетто» и которая определяется частью оборотного капитала, финансировавшегося постоянными капиталами. В этом случае финансирование чистой иммобилизации не требует совокупности постоянных капиталов.

Фонд маневрирования нетто образован собственным фондом маневрирования плюс внешним, финансируемым извне предприятия. Его расчет осуществляется как разница между оборотным капиталом и всеми обязательствами предприятия. Предприятие имеет собственный фонд маневрирования, если собственные капиталы превышают иммобилизацию нетто, или, другими словами, если оборотный капитал превышает совокупность всех обязательств: краткосрочных и долгосрочных.

Для изучения эволюции «фонда маневрирования нетто» его соотносят с оборотным капиталом и краткосрочными задолженностями.

Для этого установлены следующие относительные показатели:

$$\begin{array}{c}\text{стабильное финансирование}\\ \text{оборотного капитала}\end{array} = \frac{\text{фонд маневрирования нетто}}{\text{оборотный капитал}},$$

$$\begin{array}{c}\text{эволюция фонда}\\ \text{маневрирования нетто}\\ \text{и краткосрочных обязательств}\end{array} = \frac{\text{фонд маневрирования нетто}}{\text{краткосрочные обязательства}}$$

Анализ этих показателей на протяжении какого-то времени дает необходимую основу для определенных прогнозов на будущее, с учетом того, что фонд маневрирования может сокращаться вследствие потерь предприятия, возврата долгосрочных и краткосрочных ссуд, распределения резервов при уменьшении доходов от собственности и т.п., а также, например, из-за увеличения новых инвестиций, нефинансируемых новыми капиталами.

Сам по себе фонд маневрирования нетто не уточняет положения предприятия, поскольку даже если и остается постоянным, может перейти из адекватных в разряд недостаточных вследствие таких изменений в деятельности предприятия, как увеличение запасов, постоянное увеличение востребуемости краткосрочных обязательств, расширение клиентуры и т.д. Отсюда важность схем, позволяющих оценить на будущее величины относительных показателей из-за перемен, которые могут влиять как на числитель, так и на знаменатель отношения.

Анализ фонда маневрирования нетто почти всегда ведет к изучению ликвидности. Это понятие охватывает оборотный капитал в целом, независимо от степени реализуемости его составляющих:

$$\text{относительный показатель ликвидности} = \frac{\text{оборотный капитал}}{\text{краткосрочные обязательства}}.$$

Анализ этого показателя отражает финансовое положение в определенный момент. Он может значительно колебаться на протяжении какого-то времени, оставаясь при среднем сроке внутри четких границ. В общих чертах утверждается, что, если этот показатель меньше единицы, то фонд маневрирования нетто оказывается отрицательным, поскольку предприятие замораживает денежные средства от краткосрочных кредитов или терпит убытки.

Краткое описание на примерах содержания и целей структурных относительных показателей продемонстрирует полезность этого метода расчетов для описания ситуации, переживаемой предприятием, а также возможности оценки изменений, ожидаемых в будущем. Именно в этом направлении возможно использовать теорию нечетких множеств.

8.3. Принятие решений с использованием нечетких относительных показателей

Все чаще возникает необходимость принимать решения на основе относительных показателей, которые могут быть оценены неопределенно. Они представляют собой частное, где числитель и знаменатель являются функциями одной и той же переменной, подбираемой соответственно. В качестве инструментария для обработки неопределенных данных выберем методы, основывающиеся на понятии доверительных интервалов. Будем считать, что используются положительные действительные числа из множества R_0^+.

Пусть N — числитель и D — знаменатель какого-то отношения. В случае неопределенности интервал числителя обозначим через $[N_1, N_2]$, а знаменателя — через $[D_1, D_2]$ при условии $N_1, N_2, D_1, D_2 > 0$.

По известным правилам действий над доверительными интервалами * можно записать,

$$Q = N\ (:)\ D = [N_1, N_2]\ (:)\ [D_1, D_2] = \tag{8.1}$$

$$= \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right].$$

Если

$$Q = [Q_1, Q_2],$$

получим

$$[Q_1, Q_2] = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right].$$

Вспомним, как сравниваются два доверительных интервала. Если $A=[a_1, a_2]$ и $B=[b_1, b_2]$, то их верхняя граница

$$A\ (\vee)\ B = [a_1, a_2]\ (\vee)\ [b_1, b_2] = \tag{8.2}$$

$$= [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$$

и нижняя граница

$$A\ (\wedge)\ B = [a_1, a_2]\ (\wedge)\ [b_1, b_2] = \tag{8.3}$$

$$= [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2].$$

---

* Изложенным, например, в [3]. *(Прим. ред. перевода)*

Для упорядочения A и B можно использовать (8.2) или (8.3), вычисляя расстояние Хэмминга слева или справа:

$$(8.4)\qquad d(A, A\ (\vee)\ B) = |a_1 - a_1 \vee b_1| + |a_2 - a_2 \vee b_2|,$$

$$(8.5)\qquad d(B, A\ (\vee)\ B) = |b_1 - a_1 \vee b_1| + |b_2 - a_2 \vee b_2|.$$

Можно допустить, что если

$$(8.6)\qquad d\ (A, A\ (\vee)\ B) < d\ (B, A(\vee)\ B),$$

то A будет предпочтительнее B. Можно также вычислять расстояния относительно нижней границы:

$$(8.7)\qquad d(A, A\ (\wedge)\ B) = |a_1 - a_1 \wedge b_1| + |a_2 - a_2 \wedge b_2|,$$

$$(8.8)\qquad d(B, A\ (\wedge)\ B) = |b_1 - a_1 \wedge b_1| + |b_2 - a_2 \wedge b_2|.$$

Можно принять, что если

$$(8.9)\qquad d\ (A, A\ (\wedge)\ B) < d\ (B, A(\wedge)\ B),$$

то A будет предпочтительнее B.

Формулы, полученные выше для двух доверительных интервалов, могут быть обобщены на случай n интервалов:

$$(8.10)\qquad \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i = \left[\bigvee_{i=1}^{n} a_{1i},\ \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}\right],$$

$$(8.11)\qquad \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i = \left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i},\ \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}\right],$$

$$(8.12)\qquad d\ \left(A_i, \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i\right) = \left|a_{1i} - \bigvee_{i=1}^{n} a_{1i}\right| + \left|a_{2i} - \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}\right|,$$

$$(8.13)\qquad d\ \left(A_i, \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i\right) = \left|a_{1i} - \bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i}\right| + \left|a_{2i} - \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}\right|.$$

Поскольку расстояния d — числа, формулы (8.12) и (8.13) определяют линейное (обычно, нестрогое) упорядочение A_i. Этот полный порядок как для первого, так и для второго случая вычисления расстояния допускает выбор по области. Фактически два A_i, находясь на одинаковом расстоянии от нижней и верхней границ, могут разлагаться на классы эквивалентности, образуя полный порядок.

Формулы (8.2) и (8.13) применяются в предположении о доверительных интервалах, заданных в виде (8.1) или в несколько другой терминологии:

$$Q^{(1)}\ (\vee)\ Q^{(2)} = \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}}\right] (\vee) \left[\frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right] =$$

$$= \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}} \vee \frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} \vee \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right],$$

$$Q^{(1)}\ (\wedge)\ Q^{(2)} = \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}}\right] (\wedge) \left[\frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right] =$$

$$= \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}} \wedge \frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} \wedge \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right].$$

Рассмотрим пример:

$$N^{(1)} = [5,\ 11], \qquad D^{(1)} = [13,\ 17],$$

$$Q^{(1)} = \left[\frac{5}{17}, \frac{11}{13}\right] = [0.294,\ 0.846],$$

$$N^{(2)} = [4,\ 8], \qquad D^{(2)} = [9,\ 23],$$

$$Q^{(2)} = \left[\frac{4}{23}, \frac{8}{9}\right] = [0.173,\ 0.888],$$

$$N^{(3)} = [3,\ 13], \qquad D^{(3)} = [5,\ 11],$$

$$Q^{(3)} = \left[\frac{3}{11}, \frac{13}{5}\right] = [0.272,\ 2.600].$$

Найдем верхнюю границу

$$(8.14) \qquad Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)} =$$

$$= [0.294,\ 0.846]\ (V)\ [0.173,\ 0.888]\ (V)\ [0.272,\ 2.600] =$$

$$= [0.294,\ 2.600]\ .$$

Тогда расстояния

$$d\ (Q^{(1)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.294 - 0.294| + |0.846 - 2.600| =$$

$$= 0 + 1.754 = 1.754\ ,$$

$$d\ (Q^{(2)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.173 - 0.294| + |0.888 - 2.600| =$$

$$= 0.121 + 1.712 = 1.833\ ,$$

$$d\ (Q^{(3)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.272 - 0.294| + |2.600 - 2.600| =$$

$$= 0.022 + 0 = 0.022\ .$$

Таким образом, получим линейный порядок:

$$Q^{(3)} \succ Q^{(1)} \succ Q^{(2)}\ .$$

Поскольку $Q^{(3)}$ находится наиболее близко к доверительному интервалу (8.14), то оно является верхней границей.

Таким же образом проводим вычисления для нижней границы, используя формулы (8.11) и (8.13).

Формулы, используемые для доверительных интервалов, обобщаются на случай предположения о нечетких числах, включая уровень предположения α, следующим образом:

$$\forall\ N_1\ (\alpha),\ N_2\ (\alpha),\ D_1\ (\alpha),\ D_2\ (\alpha) \in R_0^{+}\ ,$$

$$\forall\ \alpha\ \in [0,1]$$

запишем:

$$N(\alpha) = [N_1(\alpha), N_2(\alpha)],$$
$$D(\alpha) = [D_1(\alpha), D_2(\alpha)],$$
$$Q(\alpha) = [Q_1(\alpha), Q_2(\alpha)] =$$
$$= \left[\frac{N_1(\alpha)}{D_2(\alpha)}, \frac{N_2(\alpha)}{D_1(\alpha)}\right].$$

$$A^*(\alpha) = \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i(\alpha) = \left[\bigvee_{i=1}^{n} a_{1i}(\alpha), \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}(\alpha)\right] = \tag{8.15}$$
$$= [a_1^*(\alpha), a_2^*(\alpha)],$$

$$A_*(\alpha) = \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i(\alpha) = \left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i}(\alpha), \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}(\alpha)\right] = \tag{8.16}$$
$$= [a_{*1}(\alpha), a_{*2}(\alpha)],$$

$$d(A_i(\alpha), A^*(\alpha)) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_{1i}(\alpha) - a_1^*(\alpha)|\, d\alpha + \tag{8.17}$$
$$+ \int_{\alpha=0}^{1} |a_{2i}(\alpha) - a_2^*(\alpha)|\, d\alpha,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$d(A_i(\alpha), A_*(\alpha)) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_{1i}(\alpha) - a_{*1}(\alpha)|\, d\alpha + \tag{8.18}$$
$$+ \int_{\alpha=0}^{1} |a_{2i}(\alpha) - a_{*2}(\alpha)|\, d\alpha,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Каждое выражение из (8.17) и (8.18) задает линейный порядок для A_i. Далее, для всех Q_i вида

$$Q_i(\alpha) = \left[\frac{N_{1i}(\alpha)}{D_{2i}(\alpha)}, \frac{N_{2i}(\alpha)}{D_{1i}(\alpha)}\right]$$

необходимо применить формулы (8.15) — (8.18).

Рассмотрим пример, в котором $N(\alpha)$ и $D(\alpha)$ задаются дискретными значениями $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1$.

Для того чтобы найти частное Q^*, ближайшее в верхней границе

$$\underset{\sim}{Q}_1 \,(\vee)\, \underset{\sim}{Q}_2 \,(\vee)\, \underset{\sim}{Q}_3,$$

рассмотрим три частных

$$\underset{\sim}{Q}_1 = \underset{\sim}{N}_1 \,(:)\, \underset{\sim}{D}_1,\ \underset{\sim}{Q}_2 = \underset{\sim}{N}_2 \,(:)\, \underset{\sim}{D}_2,\ \underset{\sim}{Q}_3 = \underset{\sim}{N}_3 \,(:)\, \underset{\sim}{D}_3,$$

заданных в следующих таблицах:

$$\underset{\sim}{Q}_1 \,(\vee)\, \underset{\sim}{Q}_2 \,(\vee)\, \underset{\sim}{Q}_3$$

α	$N_1(\alpha)$	$D_1(\alpha)$	$Q_1(\alpha) = N_1(\alpha) \,(:)\, D_1(\alpha)$
0	[7 , 11]	[4 , 13]	[0.538 , 2.750]
0.1	[7 , 11]	[4 , 12]	[0.583 , 2.750]
0.2	[7 , 10]	[4 , 12]	[0.583 , 2.500]
0.3	[7 , 10]	[5 , 12]	[0.583 , 2.000]
0.4	[8 , 10]	[5 , 11]	[0.727 , 2.000]
0.5	[8 , 10]	[5 , 11]	[0.727 , 2.000]
0.6	[8 , 10]	[5 , 10]	[0.800 , 2.000]
0.7	[9 , 10]	[6 , 10]	[0.900 , 1.666]
0.8	[9 , 10]	[8 , 9]	[1.000 , 1.250]
0.9	9	[8 , 9]	[1.000 , 1.125]
1	9	8	1.125

α	$N_2(\alpha)$	$D_2(\alpha)$	$Q_2(\alpha) = N_2(\alpha)\ (:)\ D_2(\alpha)$
0	[9 , 18]	[4 , 13]	[0.692 , 4.500]
0.1	[9 , 17]	[4 , 13]	[0.692 , 4.250]
0.2	[9 , 17]	[4 , 12]	[0.750 , 4.250]
0.3	[10 , 16]	[5 , 11]	[0.909 , 3.200]
0.4	[10 , 15]	[5 , 11]	[0.909 , 3.000]
0.5	[10 , 15]	[6 , 10]	[1.000 , 2.500]
0.6	[10 , 14]	[6 , 10]	[1.000 , 2.333]
0.7	[10 , 13]	[6 , 10]	[1.000 , 2.166]
0.8	[11 , 13]	[7 , 9]	[1.222 , 1.857]
0.9	[11 , 12]	[8 , 9]	[1.222 , 1.500]
1	12	8	1.500

α	$N_3(\alpha)$	$D_3(\alpha)$	$Q_3(\alpha) = N_3(\alpha)\ (:)\ D_3(\alpha)$
0	[1 , 20]	[3 , 8]	[0.125 , 6.666]
0.1	[2 , 19]	[3 , 8]	[0.250 , 6.333]
0.2	[3 , 17]	[4 , 8]	[0.375 , 4.250]
0.3	[4 , 15]	[4 , 8]	[0.500 , 3.750]
0.4	[6 , 13]	[4 , 8]	[0.750 , 3.250]
0.5	[7 , 12]	[5 , 7]	[1.000 , 2.400]
0.6	[8 , 12]	[5 , 7]	[1.142 , 2.400]
0.7	[8 , 12]	[5 , 7]	[1.142 , 2.400]
0.8	[10 , 12]	[6 , 7]	[1.428 , 2.000]
0.9	11	[6 , 7]	[1.571 , 1.833]
1	11	7	1.571

α	$\bigvee_{i=1}^{3} Q_i(\alpha)$
0	[0.692 , 6.666]
0.1	[0.692 , 6.333]
0.2	[0.750 , 4.250]
0.3	[0.909 , 3.750]
0.4	[0.909 , 3.250]
0.5	[1.000 , 2.500]
0.6	[1.142 , 2.400]
0.7	[1.142 , 2.400]
0.8	[1.428 , 2.000]
0.9	[1.571 , 1.833]
1	1.571

α	$d(Q_1(\alpha), \bigvee Q_i(\alpha))$	
0	$\|0.538 - 0.692\| + \|2.750 - 6.666\| = 0.154 + 3.916$	4.070
0.1	$\|0.583 - 0.692\| + \|2.750 - 6.333\| = 0.109 + 3.583$	3.692
0.2	$\|0.583 - 0.750\| + \|2.500 - 4.250\| = 0.167 + 1.750$	1.917
0.3	$\|0.583 - 0.909\| + \|2.000 - 3.750\| = 0.326 + 1.750$	2.076
0.4	$\|0.727 - 0.909\| + \|2.000 - 3.250\| = 0.182 + 1.250$	1.432
0.5	$\|0.727 - 1.000\| + \|2.000 - 2.500\| = 0.273 + 0.500$	0.773
0.6	$\|0.800 - 1.142\| + \|2.000 - 2.400\| = 0.342 + 0.400$	0.742
0.7	$\|0.900 - 1.142\| + \|1.666 - 2.400\| = 0.242 + 0.734$	0.976
0.8	$\|1.000 - 1.428\| + \|1.250 - 2.000\| = 0.428 + 0.750$	1.178
0.9	$\|1.000 - 1.571\| + \|1.125 - 1.833\| = 0.571 + 0.708$	1.279
1	$\|1.125 - 1.571\| + \|1.125 - 1.571\| = 0.446 + 0.446$	0.892
	ИТОГО	19.027

α	$d\,(Q_2(\alpha), \bigvee Q_i(\alpha))$	
0	$\lvert 0.692 - 0.692\rvert + \lvert 4.500 - 6.666\rvert = 0 + 2.166$	2.166
0.1	$\lvert 0.692 - 0.692\rvert + \lvert 4.250 - 6.333\rvert = 0 + 2.083$	2.083
0.2	$\lvert 0.750 - 0.750\rvert + \lvert 4.250 - 4.250\rvert = 0 + 0$	0.000
0.3	$\lvert 0.909 - 0.909\rvert + \lvert 3.200 - 3.750\rvert = 0 + 0.550$	0.550
0.4	$\lvert 0.909 - 0.909\rvert + \lvert 3.000 - 3.250\rvert = 0 + 0.250$	0.250
0.5	$\lvert 1.000 - 1.000\rvert + \lvert 2.500 - 2.500\rvert = 0 + 0$	0.000
0.6	$\lvert 1.000 - 1.142\rvert + \lvert 2.333 - 2.400\rvert = 0.142 + 0.067$	0.209
0.7	$\lvert 1.000 - 1.142\rvert + \lvert 2.166 - 2.400\rvert = 0.142 + 0.234$	0.376
0.8	$\lvert 1.222 - 1.428\rvert + \lvert 1.857 - 2.000\rvert = 0.206 + 0.143$	0.349
0.9	$\lvert 1.222 - 1.571\rvert + \lvert 1.500 - 1.833\rvert = 0.349 + 0.333$	0.682
1	$\lvert 1.500 - 1.571\rvert + \lvert 1.500 - 1.571\rvert = 0.071 + 0.071$	0.142
	ИТОГО	6.807

α	$d\,(Q_3(\alpha), \bigvee Q_i(\alpha))$	
0	$\lvert 0.125 - 0.692\rvert + \lvert 6.666 - 6.666\rvert = 0.567 + 0$	0.567
0.1	$\lvert 0.250 - 0.692\rvert + \lvert 6.333 - 6.333\rvert = 0.442 + 0$	0.442
0.2	$\lvert 0.375 - 0.750\rvert + \lvert 4.250 - 4.250\rvert = 0.375 + 0$	0.375
0.3	$\lvert 0.500 - 0.909\rvert + \lvert 3.750 - 3.750\rvert = 0.409 + 0$	0.409
0.4	$\lvert 0.750 - 0.909\rvert + \lvert 3.250 - 3.250\rvert = 0.159 + 0$	0.159
0.5	$\lvert 1.000 - 1.000\rvert + \lvert 2.400 - 2.500\rvert = 0 + 0.100$	0.100
0.6	$\lvert 1.142 - 1.142\rvert + \lvert 2.400 - 2.400\rvert = 0 + 0$	0.000
0.7	$\lvert 1.142 - 1.142\rvert + \lvert 2.400 - 2.400\rvert = 0 + 0$	0.000
0.8	$\lvert 1.428 - 1.428\rvert + \lvert 2.000 - 2.000\rvert = 0 + 0$	0.000
0.9	$\lvert 1.571 - 1.571\rvert + \lvert 1.833 - 1.833\rvert = 0 + 0$	0.000
1	$\lvert 1.571 - 1.571\rvert + \lvert 1.571 - 1.571\rvert = 0 + 0$	0.000
	ИТОГО	2.052

Упорядочение расстояний дает

$$2.052 \succ 6.807 \succ 19.027 ,$$

что соответствует упорядочению

$$Q_3 \succ Q_2 \succ Q_1 .$$

Методика, изложенная выше с привлечением несложного примера, может быть реализована для большего количества нечетких частных. Также можно исследовать задачу в предположении, что нечеткие числа $\underset{\sim}{N}$ и $\underset{\sim}{D}$ являются непрерывными функциями одной и той же переменной x. В этом случае для расчетов функции N(x) и D(x) задаются таблично с шагом, достаточным для демонстрации точности модели.

ГЛАВА 9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОВАРОВ

9.1. Распределение товаров и транспортная задача

Исследования, связанные с принятием решений на предприятиях, основаны на определенном знании структуры рынка, в условиях которого действует конкретное предприятие. Более того, все инвестиционные и производственные процессы непосредственно зависят от возможности сбыта готовой продукции. Это один из основных принципов развития, который используется во многих подходах к решению коммерческих проблем. Большую роль в этом случае играет маркетинг, который включен в общую структуру предприятия и выполняет одну из главных функций в его управлении.

С другой стороны, правильные действия в рамках экономической деятельности нуждаются в глубоком понимании тех связей, которые существуют между различными функциями внутри предприятия. Этим и объясняется особая важность процессов коммерциализации, поскольку они позволяют претворить в жизнь программы всесторонней деятельности предприятия на основе оценки сбыта. С этой точки зрения базовой является информация, определяющая эволюцию потребностей рынка и таких его элементов, как вкусы потребителей, положение предприятий-конкурентов и т. д. Это необходимо для определения основных целей и выработки политики как в области распределения и сбыта, так и в области рекламы. При исследовании проблемы, касающейся коммерческого управления предприятием, часто обращаются к достижениям в таких областях, как исследование причинности, структурный анализ групп потребителей, изучение структуры эволюции спроса и процессов размещения товаров.

В этой связи в книгах, считающихся классическими в данной области, подчеркивается особая важность анализа поведения потребителя. С точки зрения теории экономисты исследовали как запросы потребителей, так и процессы по их удовлетворению. В третьей книге «Принципов» Маршалла, его чистой теории спроса, имеется формулировка общей схемы: потребитель, обладающий определенными средствами, идет на рынок потребительских товаров. Возникает вопрос, как он распределит свои средства (при определенных ценах) между различными покупками для получения максимального удовлетворения своих потребностей. С этой точки зрения экономический анализ пренебрегает причинами, которые побуждают покупателя к действиям. Предполагается, что покупатель пытается достигнуть наивысшего благополучия с помощью удовлетворения своих потребностей, понимаемых как ощущение нехватки чего-либо, соединенной с желанием ее преодолеть.

Однако в действительности оказалось, что классических механизмов недостаточно для управления предприятием в условиях, когда оно желает понять действия покупателя. Возникла необходимость большего соединения формальных процессов и реальной деятельности.

В настоящее время предприятия, конкурирующие на рынке, пытаются изменить образ своей продукции для того, чтобы изменить отношение покупателя, имея в виду одно конкретное действие: покупку их собственных товаров.

Возможно, эта схема покажется излишне простой, поскольку речь будет идти об индивидуальном покупателе и конкретном товаре. Однако ее обобщение в части, соответствующей товару, является непосредственным. Что касается аспекта рассмотрения группы потребителей, то он затрагивает психолого-социологические исследования, поскольку человек погружен в конкретную социальную группу.

Среди различных важнейших возможностей предприятия влиять на потребителей традиционно рассматриваются следующие :

1) возможности, ведущие к расширению затрат. Среди них могут быть выделены: реклама, расширение сети размещения товаров и их продвижение в пункты продажи;

2) возможности, ведущие к уменьшению поступлений. Обычно упоминается снижение цен при розничной продаже, снижение цен при превышении объемов договорных поставок (создание «rappels») и увеличение скидок посредникам.

Тот факт, что количество проданных предприятием изделий может подвергаться влиянию различных факторов, приводит к тому, что наличие только функции спроса в маргиналистской теории оказывается совершенно недостаточным. Предполагается, что существуют элементы микро- и макроэкономики, изменение которых приводит к изменению запрашиваемого количества товаров. Среди них: население, способное превратиться в конкретных потребителей, качество рекламы, сеть размещения товаров и пунктов продажи, цена изделий и т.п.

Очевидно, что действия предприятия по изменению ситуации на рынке связаны с использованием различных путей. Иногда приходится воздействовать на цены, иногда на рекламу, изделия, сеть размещения, пункты продажи, конкурентов и т.д. Если какое-то предприятие желает продавать свою продукцию в самых благоприятных условиях, то одно из возможных его действий связано с созданием сети размещения, которая обеспечивала бы перемещение продукции из мест ее изготовления к клиентам на всей территории, где осуществляется коммерческая деятельность предприятия.

Обычно между этими точками находятся склады, цель которых заключается в реализации поставляемого с фабрик товара на местах, где не гарантированы необходимые для этого условия. Склады могут достигать определенной степени рентабельности, когда уровень их деятельности достаточен для покрытия структурных затрат. Это связано с тем, что перевозка продукции с предприятий на склады осуществляется при помощи большегрузного транспорта, а перемещение товаров к пунктам розничной продажи производится небольшими партиями. Отсюда возникает необходимость в создании сети складов, наиболее адекватной с экономической точки зрения. Но создание и содержание складов ведет к высоким финансовым затратам на их строительство и функционирование. Только объем сбыта, прогнозируемого на будущее, позволяет принять решение о строительстве и содержании тех или иных складов. Обычно эти склады являются перегруппировкой точек продажи в какой-то географической зоне. Их располагают таким образом, чтобы достигнуть равновесия расходов на транспорт из центров производства до складов и от них к различным пунктам продажи.

На практике принятие решений сводится к действиям, основанным на здравом смысле или частично на математических подходах.

В таком случае на первое место выступает необходимость решить, какой должна быть структура сети распределения товаров и ее определяющие элементы: количество, вместимость и расположение промежуточных складов (между центрами изготовления и точками сбыта). Все эти величины обычно выражаются целыми числами. Это, как правило, устраняет необходимость подбора методов, основанных на концепциях непрерывности. Все большее распространение получают методы линейного программирования, которые благодаря современным компьютерам успешно применяются для решения и анализа практических задач. Однако разнообразие проблем, которые возникают в области распространения товаров, затрудняет нахождение модели, достаточно общей для желаемой степени охвата. В общих чертах схема заключается в выборе пунктов размещения складов и их вместимости, а также в определении объемов товара, который необходимо перевезти с каждого предприятия на каждый склад и с каждого склада на каждый пункт продажи.

Оптимальное решение будет получено при тех значениях переменных, которые обеспечивают минимум общих затрат и компоненты которых в свою очередь имеют самые разные значения. Действительно, можно отметить расходы, связанные с отгрузкой товаров, затраты на транспортировку из центров изготовления на склады и из них в пункты продажи, затраты на прием товаров, складирование и их отправку со складов. Каждый из таких видов затрат имеет свою эволюцию и подчиняется разным законам.

Когда на предприятии (в центре изготовления), на одном или на нескольких пунктах продажи устанавливается или изменяется структура размещения товаров, задача не заканчивается определением пунктов, в которых должны быть расположены склады. Возникает необходимость найти поток товаров между предприятиями и складами (рассчитанный в одних и тех же единицах), а также его распределение по количеству отправок. Базовые данные приводятся ежегодно при разработке общих бюджетов предприятия. В них имеются данные, характеризующие объемы производимых товаров, а также расходы на их транспортировку. Для решения этой проблемы существует множество подходов. Один из наиболее используемых основан на линейном программировании и известен как метод stepping-stone *.

9.2. Организация перевозок с помощью ss-метода

Рассмотрим ss-метод на примере, где затраты предполагаются точно известными величинами. Можно отметить, что обобщение на случай с нечеткой стоимостью перевозки единицы продукции не представляется слишком сложной задачей.

Пусть имеется три предприятия A, B и C с определенным количеством товара одного вида. Этот товар в объеме 100, 120 и 120 единиц должен быть направлен на 5 складов, каждый из которых получает соответственно 40, 50, 70, 90 и 90 единиц.

На рис. 9.1 представлена схема транспортных взаимосвязей.

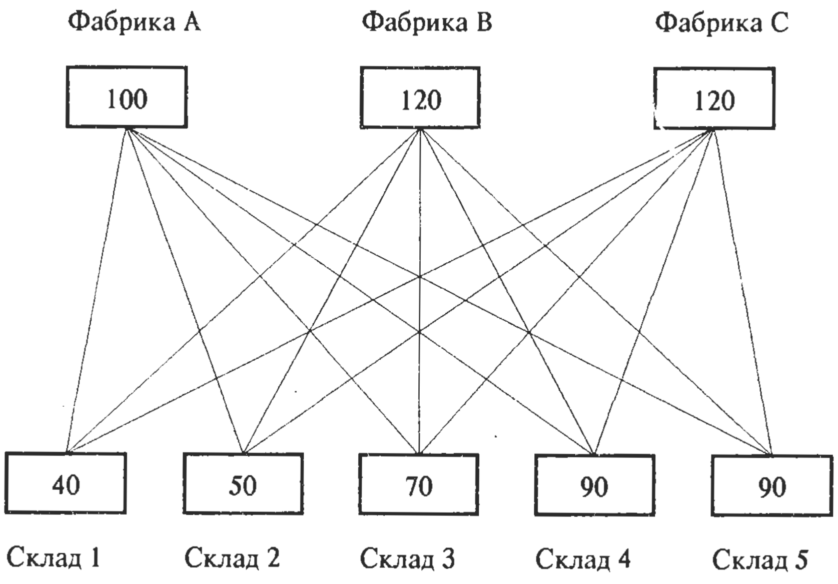


Рис. 9.1

---

* По классификации, принятой в русскоязычной научной литературе, этот метод близок к методу потенциалов. Ниже в тексте будем использовать сокращение «ss-метод». *(Прим.ред.перевода.)*

Транспортные расходы, связанные с перевозкой единицы продукции, задаются в таблице (9.1). Например, расходы на транспортировку с предприятия В на склад 4 составляют 5 денежных единиц. Необходимо построить такой план перевозок, чтобы суммарные расходы были минимальными.

(9.1)

	1	2	3	4	5	
A	4	1	2	6	9	100
B	6	4	3	5	7	120
C	5	2	6	4	8	120
	40	50	70	90	90	

Это задача линейного программирования, содержащая 15 переменных и 7 независимых уравнений. Нумерация переменных производится в соответствии с номерами строк и столбцов таблицы (9.1).

Целевая функция имеет вид

$$\text{Min } Z = 4x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15} + 6x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} + 5x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 4x_{34} + 8x_{35} \tag{9.2}$$

Ограничениями будут:

$$\left\{\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 120, \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 120, \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50, \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70, \\ & \vdots \end{aligned}\right. \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 90\,, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 90\,, \\ x_{ij} \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ i = 1,\ 2,\ 3\,. \end{cases}$$

Однако не все из восьми условий независимы, поскольку

(9.4) $\qquad 100 + 120 + 120 = 40 + 50 + 70 + 90 + 90.$

Существуют только 7 независимых условий, поэтому базовые решения будут содержать 15 — 7 = 8 независимых переменных.

Описанная задача может быть решена с помощью классических методов линейного программирования, например симплекс-методом Данцига, относительно всех ее переменных. Однако из-за особенностей структуры ограничений задачи предпочтительней использовать очень простой, но более специфический метод, также разработанный Данцигом и известный как метод stepping-stone.

Построим начальное базовое решение, используя простое правило, называемое правилом северо-западного угла. Начиная с северо-западной клетки (верхняя левая часть таблицы (9.5)), поступают следующим образом: на пересечении первой строки и первого столбца помещают наименьшее из чисел, соответствующих предложению и спросу. Если выбранное число соответствует спросу, то остальные значения перевозок в столбце будут нулевыми, его удаляют из таблицы, уменьшают величину предложения на выбранное значение и правило северо-западного угла применяют для оставшейся части таблицы. Если выбранное число соответствует предложению, то остальные значения перевозок в строке будут нулевыми, ее удаляют из таблицы, уменьшают величину спроса на выбранное значение, и правило повторяют для оставшейся части таблицы. Для рассматриваемого примера получится план перевозок

(9.5)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

со значениями неизвестных

(9.6) $\qquad x_{11} = 40,\ x_{12} = 50,\ x_{13} = 10,\ x_{14} = x_{15} = 0,$

$$(9.7) \qquad x_{21} = x_{22} = 0,\ x_{23} = 60,\ x_{24} = 60,\ x_{25} = 0,$$

$$(9.8) \qquad x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0,\ x_{34} = 30,\ x_{35} = 90.$$

Перевозки, представленные в (9.5), приведут к общим затратам

$$(9.9) \qquad Z = (40) \cdot (4) + (50) \cdot (1) + (10) \cdot (2) + (60) \cdot (3) + \\ + (60) \cdot (5) + (30) \cdot (4) + (90) \cdot (8) = 1550\,.$$

Исходя из полученного решения, найдем новое, ведушее к уменьшению величины суммарных затрат. Для этого будем использовать специальную процедуру. Новая единица размещается в клетке [1,4], т.е. в первой строке и четвертом столбце (9.10). Тогда необходимо убрать старую единицу из клетки [1,3] и добавить ее в клетку [2,3] и наконец убрать единицу из клетки [2,4]. Эта циклическая процедура обмена одной единицы товара изменяет общую стоимость затрат на величину δ_{ij}*, которая легко получается из таблицы затрат (9.1):

(9.10)

40	50	10 / −1	+1	
		60 / +1	60 / −1	
			30	90

(9.11)

40	50	10 / −1		+1
		60 / +1	60 / −1	
			30 / +1	90 / −1

(9.12)

40 / −1	50	10 / +1		
+1		60 / −1	60	
			30	90

---

* Величины δ_{ij} представляют собой отклонения стоимости перевозки единицы продукции, когда в симплексе переходят из одной базы в другую, и являются двойственными оценками стоимости.

(9.13)

40	50 —1	10 +1		
	+1	60 —1	60	
			30	90

(9.14)

40	50	10		
		60	60 —1	+1
			30 +1	90 —1

(9.15)

40 —1	50	10 +1		
		60 —1	60 +1	
+1			30 —1	90

(9.16)

40	50 —1	10 +1		
		60 —1	60 +1	
	+1		30 —1	90

(9.17)

40	50	10		
		60 —1	60 +1	
		+1	30 —1	90

(9.18) $\delta_{14} = 6 - 2 + 3 - 5 = 2.$

Таким же образом вычисляются изменения, соответствующие таблицам:

(9.19) таблица (9.11): $\delta_{15} = 9 - 2 + 3 - 5 + 4 - 8 = 1,$

(9.20) таблица (9.12): $\delta_{21} = 6 - 3 + 2 - 4 = 1,$

(9.21) таблица (9.13): $\delta_{22} = 4 - 3 + 2 - 1 = 2,$

(9.22) таблица (9.14): $\delta_{25} = 7 - 5 + 4 - 8 = -2$,

(9.23) таблица (9.15): $\delta_{31} = 5 - 4 + 5 - 3 + 2 - 4 = 1$,

(9.24) таблица (9.16): $\delta_{32} = 2 - 4 + 5 - 3 + 2 - 1 = 1$,

(9.25) таблица (9.17): $\delta_{33} = 6 - 4 + 5 - 3 = 4$.

Название stepping-stone происходит от способа выбора пути для осуществления расчетов при определении клеток таблиц. Рассмотрим теперь изменения, связанные со снижением общих затрат. Для этого необходимо, чтобы δ было отрицательным, что имеет место при $\delta_{25} = -2$. Если их несколько, то среди отрицательных выбирается максимальное по модулю. Теперь вместо одной единицы переместим максимально возможное количество товара. Для этого выберем наименьшее из чисел в клетках, где находится —1. Таблица (9.14) показывает, что это клетка [2,4]. Для того, чтобы реализовать спрос, запишем 90 вместо 30 в клетке [3,4] и 30 вместо 90 в клетке [3,5]. В результате переходим к таблице

(9.26)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

Величина общих затрат в этом случае составит

$$Z = (40) \cdot (4) + (50) \cdot (1) + (10) \cdot (2) + (60) \cdot (3) + (60) \cdot (7) + (90) \cdot (4) + (30) \cdot (8) = 1430. \tag{9.27}$$

Этот результат хорошо прогнозируем, так как каждая единица товара уменьшает общие затраты на две денежные единицы, а приращение в 60 единиц должно уменьшить себестоимость на 120.

Повторим предыдущие расчеты для нового решения. При рассмотрении таблицы (9.26) получим:

(9.28)

40	50	10 / —1	+1	
		60 / +1		60 / —1
			90 / —1	30 / +1

(9.29)

40	50	10 −1		+1
		60 +1		60 −1
			90	30

(9.30)

40 −1	50	10 +1		
+1		60 −1		60
			90	30

(9.31)

40	50 −1	10 +1		
	+1	60 −1		60
			90	30

(9.32)

40	50	10		
		60	+1	60 −1
			90 −1	30 +1

(9.33)

40 −1	50	10 +1		
		60 −1		60 +1
+1			90	30 −1

(9.34)

40	50 −1	10 +1		
		60 −1		60 +1
	+1		90	30 −1

(9.35)

40	50	10		
		60 −1		60 +1
		+1	90	30 −1

(9.36) таблица (9.28): $\delta_{14} = 6—2 + 3—7 + 8—4 = 4$,

(9.37) таблица (9.29): $\delta_{15} = 9—2 + 3—7 = 3$,

(9.38) таблица (9.30): $\delta_{21} = 6—3 + 2—4 = 1$,

(9.39) таблица (9.31): $\delta_{22} = 4—3 + 2—1 = 2$,

(9.40) таблица (9.32): $\delta_{24} = 5—7 + 8—4 = 2$,

(9.41) таблица (9.33): $\delta_{31} = 5—8 + 7—3 + 2—4 = —1$,

(9.42) таблица (9.34): $\delta_{32} = 2—8 + 7—3 + 2—1 = —1$,

(9.43) таблица (9.35): $\delta_{33} = 6—8 + 7—3 = 2$.

В этом случае можно выбрать δ_{31} и δ_{32} с одинаковым значением —1. Возьмем, например, δ_{31}. Выберем минимальное число в клетках с —1 таблицы (9.33). Произведем перераспределение плана перевозок на 30 единиц. начиная с клетки [3,1], что дает следующее решение :

(9.44)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

для которого

(9.45) $$Z = (10) \cdot (4) + (50) \cdot (1) + (40) \cdot (2) + (30) \cdot (3) + + (90) \cdot (7) + (30) \cdot (5) + (90) \cdot (4) = 1400.$$

Результат также прогнозируем, поскольку обмен приводит к уменьшению на $30 \times 1 = 30$ единиц.

Повторим вновь процедуру stepping-stone. Получим:

(9.46) $\delta_{14} = 6—4 + 5—4 = 3$,

(9.47) $\delta_{15} = 9—2 + 3—7 = 3$,

(9.48) $\delta_{21} = 6 - 3 + 2 - 4 = 1,$

(9.49) $\delta_{22} = 4 - 3 + 2 - 1 = 2,$

(9.50) $\delta_{24} = 5 - 3 + 2 - 4 + 5 - 4 = 1,$

(9.51) $\delta_{32} = 2 - 5 + 4 - 1 = 0,$

(9.52) $\delta_{33} = 6 - 5 + 4 - 2 = 3,$

(9.53) $\delta_{35} = 8 - 5 + 4 - 2 + 3 - 7 = 1.$

Не существует другого плана перевозок, который позволил бы сократить затраты, так как все δ положительные или нулевые. Приходим к выводу о невозможности улучшения решения. Существует другое эквивалентное решение, так как одна из δ является нулевой. Перераспределение δ_{32} (по (9.42)) приводит к следующей таблице:

(9.54)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

Это решение дает такое же значение для Z:

(9.55) $$Z = (40) \cdot (4) + (20) \cdot (1) + (40) \cdot (2) + (30) \cdot (3) + + (90) \cdot (7) + (30) \cdot (2) + (90) \cdot (4) = 1400.$$

В действительности в этом случае существует бесконечное множество решений, которые соответствуют оптимуму 1400, начиная с клетки [3,2], в объеме ниже 30. Однако эти решения не являются базовыми в том понимании, которое придается этому термину в симплекс-методе.

9.3. Учет нечетких затрат в ss-методе

Приведенное выше описание ss-метода позволяет перейти к решению задачи организации перевозок в предположении, что затраты являются нечеткими. Для удобства при выполнении соответствующих расчетов и простоты получения нечетких данных воспользуемся нечеткими числами треугольной формы (НЧТ). На рис. 9.2 представлено НЧТ с помощью трех характерных чисел:

(9.56) $$\underset{\sim}{A} = (a_1, a_2, a_3),$$

где a_1 — наименьшее значение,
a_2 — наибольшее значение,
a_3 — максимально предполагаемое значение.

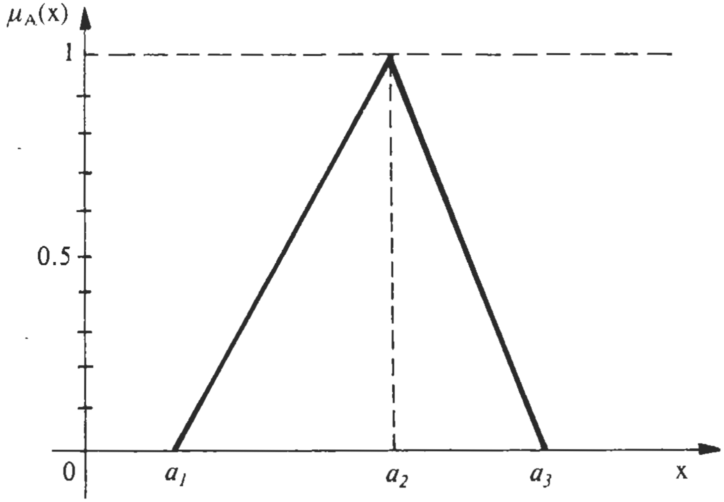


Рис. 9.2

Для применения ss-метода (в предположении о том, что затраты являются НЧТ) необходимо знать три операции: сумму, разность и сравнение. Как отмечалось ранее,

(9.57) $$\underset{\sim}{A} \ (+) \ \underset{\sim}{B} = (a_1, a_2, a_3) \ (+) \ (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

(9.58) $$\underset{\sim}{A} \ (-) \ \underset{\sim}{B} = (a_1, a_2, a_3) \ (-) \ (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

Заметим также, что порядок выполнения операций сложения и вычитания не имеет особого значения:

$$(9.59)\qquad ((a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1, b_2, b_3))\ (—)\ (c_1, c_2, c_3) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\ (—)\ (c_1, c_2, c_3) = \\ = (a_1 + b_1 — c_3, a_2 + b_2 — c2, a_3 + b_3 — c_1),$$

$$(9.60)\qquad ((a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1, b_2, b_3))\ (—)\ (c_1, c_2, c_3) = \\ = (a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1 — c_3, b_2 — c_2, b_3 — c_1) = \\ = (a_1 + b_1 — c_3, a_2 + b_2 — c_2, a_3 + b_3 — c_1).$$

Перейдем теперь к сравнению НЧТ, что может осуществляться различными способами. Самый обычный (допускающий лучшее обоснование) основан на вычислении суммы расстояний (расстояние Хемминга или любое другое) справа и слева относительно произвольной вертикальной оси (например, относительно абсциссы 0 *, и в этом случае все соотносится с числом 0).

Вычисляемые для НЧТ отклонения определяются простой формулой

$$(9.61)\qquad \xi\ (\underset{\sim}{A}, O) = \frac{a_1 + 2\ a_2 + a_3}{2}, \qquad a_1, a_2, a_3 \in R .$$

Формула позволяет классифицировать два нечетких числа, определенных в R, с соответствующими модификациями (рис. 9.3).

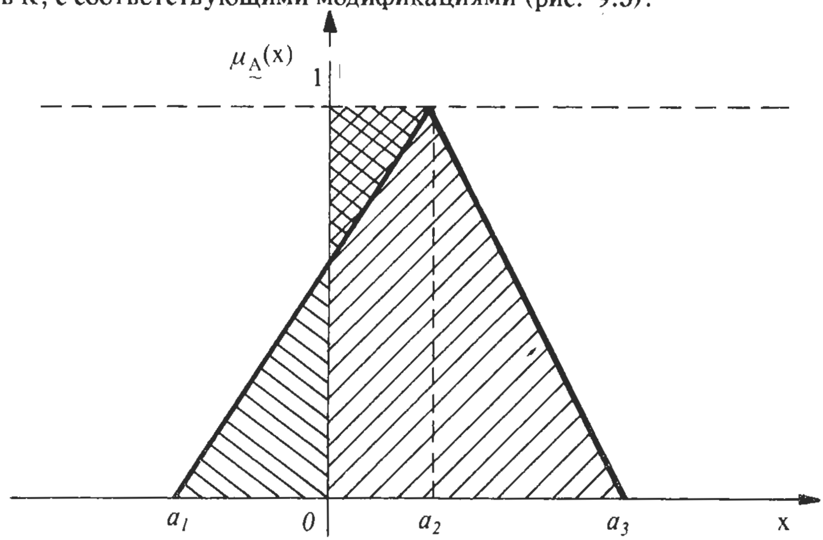


Рис. 9.3

---

* Имея в виду позицию (отрицательную или положительную) величин (a_1, a_2, a_3).

Напомним, что два разных нечетких числа A и B могут иметь одно и то же отклонение, как это мы имеем для чисел (2, 3, 7) и (1, 2, 10). В этом случае необходимо использовать второй критерий, например критерий, соответствующий величине максимальной достоверности. Если вновь получаются равные значения, то нужно искать третий критерий (наибольшую или наименьшую величину в соответствии с особенностью задачи и понятием неопределенности). В этом и заключается суть подхода к преодолению неопределенности. Конечно, необходимо иметь в виду, что в случае отсутствия наиболее предпочтительного из таких критериев рассмотрение всех их для сравнения может быть полезным.

Принимая во внимание вышеизложенное, перейдем к использованию ss-метода, предполагая, что нечеткие затраты имеют форму НЧТ. Выбираем их так, чтобы значения максимальной достоверности соответствовали данным из (9.1):

(9.62)

	1	2	3	4	5	
A	(3,4,6)	(1,1,3)	(1,2,4)	(3,6,6)	(8,9,12)	100
B	(5,6,7)	(2,4,7)	(2,3,4)	(2,5,6)	(6,7,7)	120
C	(2,5,6)	(2,2,4)	(6,6,6)	(3,4,8)	(5,8,9)	120
	40	50	70	90	90	

Будем исходить из решения, полученного по правилу северо-западного угла (9.5) :

(9.63)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

Оно дает

$$(9.64)\quad \underset{\sim}{Z} = (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4)\ (+)$$
$$(+)\ (60)\ (2,3,4)\ (+)\ (60)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (3,4,8)\ (+)$$
$$(+)\ (90)\ (5,8,9) =$$
$$= (120,\ 160,\ 240)\ (+)\ (50,\ 50,\ 150)\ (+)\ (10,\ 20,\ 40)\ (+)$$
$$(+)\ (120,\ 180,\ 240)\ (+)\ (120,\ 300,\ 360)\ (+)\ (90,\ 120,\ 240)\ (+)$$
$$(+)\ (450,\ 720,\ 810) =$$
$$= (960,\ 1550,\ 2080), \qquad \xi_Z = 3.070\ .$$

Для оптимизации ξ_Z воспользуемся одним из вариантов ss-метода. Вместо вычисления одного (или нескольких) наименьших отрицательных δ_{ij} как критерия отбора, характеризующего разброс относительно вычисленных крайних точек НЧТ (по формуле (9.58)), рассчитываем stepping-stone для каждой δ_{ij} (не являющейся базовой) и соответствующее $\underset{\sim}{Z}$, что займет не больше времени, чем расчет семи stepping-stone и семи небазовых δ_{ij}. Для классификации полученных $\underset{\sim}{Z}$ воспользуемся оценкой ξ. Рассмотрим этот процесс подробнее:

(9.65)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	⑩ —	+		100
B			60 +	60 —		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.66)

	1	2	3	4	5	
A	40	50		10		100
B			70	50		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.67) $\underset{\sim}{Z}_{14} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(3,6,6)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)$
$(+)\,(50)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(3,4,8)\,(+)\,(90)\,(5,8,9) =$
$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(30,60,60)\,(+)$
$(+)\,(140,210,280)\,(+)\,(100,250,300)\,(+)\,(90,120,240)\,(+)$
$(+)\,(450,720,810) = (980,1570,2080),\ \xi_{14} = 3100$,

(9.68)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	⑩ —		+	100
B			60 +	60 —		120
C				30 +	90 —	120
	40	50	70	90	90	

(9.69)

	1	2	3	4	5	
A	40	50			10	100
B			70	50		120
C				40	80	120
	40	50	70	90	90	

(9.70)
$$\begin{aligned}
Z_{15} &= (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(8,9,12)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)\\
&\quad (+)\,(50)\,(2,5,6)\,(+)\,(40)\,(3,4,8)\,(+)\,(80)\,(5,8,9) =\\
&= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(80,90,120)\,(+)\\
&\quad (+)\,(140,210,280)\,(+)\,(100,250,300)\,(+)\,(120,160,320)\,(+)\\
&\quad (+)\,(400,640,720) = (1010,1560,2130), \qquad \xi_{15} = 3130,
\end{aligned}$$

(9.71)

	1	2	3	4	5	
A	40 −	50	10 +			100
B	+		60 −	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.72)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	40		20	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.73)
$$\begin{aligned}
Z_{21} &= (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(1,2,4)\,(+)\,(40)\,(5,6,7)\,(+)\,(20)\,(2,3,4)\,(+)\\
&\quad (+)\,(60)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(3,4,8)\,(+)\,(90)\,(5,8,9) =\\
&= (50,50,150)\,(+)\,(50,100,200)\,(+)\,(200,240,280)\,(+)\\
&\quad (+)\,(40,60,80)\,(+)\\
&\quad (+)\,(120,300,360)\,(+)\,(90,120,240)\,(+)\,(450,720,810) =\\
&= (1000,1590,2120), \qquad \xi_{21} = 3150,
\end{aligned}$$

(9.74)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 −	10 +			100
B		+	60 −	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.75)

	1	2	3	4	5	
A	40		60			100
B		50	10	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.76)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{22} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (60)\ (1,2,4)\ (+)\ (50)\ (2,4,7)\ (+)\ (10)\ (2,3,4)\ (+)\\ &\quad (+)\ (60)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (3,4,8)\ (+)\ (90)\ (5,8,9) =\\ &= (120,160,240)\ (+)\ (60,120,240)\ (+)\ (100,200,350)\ (+)\\ &\quad (+)\ (20,30,40)\ (+)\ (120,300,360)\ (+)\ (90,120,240)\ (+)\\ &\quad (+)\ (450,720,810) = (960,1650,2280). \qquad \xi_{22} = 3270\,,\end{aligned}$$

(9.77)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60 —	+	120
C				30 +	90 —	120
	40	50	70	90	90	

(9.78)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.79)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{25} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4)\ (+)\ (60)\ (2,3,4)\ (+)\\ &\quad (+)\ (60)\ (6,7,7)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\ (+)\ (30)\ (5,8,9) =\\ &= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (10,20,40)\ (+)\\ &\quad (+)\ (120,180,240)\ (+)\\ &\quad (+)\ (360,420,420)\ (+)\ (270,360,720)\ (+)\ (150,240,270) =\\ &= (1080,1430,2080),\ \xi_{25} = 3010\,,\end{aligned}$$

(9.80)

	1	2	3	4	5	
A	40 —	50	10 +			100
B			60 —	60 +		120
C	+			30 —	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.81)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30	90		120
C	30				90	120
	40	50	70	90	90	

(9.82)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{31} &= (10)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)\\ &\quad (+)\,(90)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(5,8,9) =\\ &= (30,40,60)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(40,80,160)\,(+)\,(60,90,120)\,(+)\\ &\quad (+)\,(180,450,540)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\,(450,720,810) =\\ &= (870,1580,2020). \qquad \xi_{31} = 3025\,,\end{aligned}$$

(9.83)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 —	10 +			100
B			60 —	60 +		120
C		+		(30) —	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.84)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30	90		120
C		30			90	120
	40	50	70	90	90	

(9.85)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{32} &= (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(20)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)\\ &\quad (+)\,(90)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(2,2,4)\,(+)\,(90)\,(5,8,9) =\\ &= (120,160,240)\,(+)\,(20,20,60)\,(+)\,(40,80,160)\,(+)\,(60,90,120)\,(+)\\ &\quad (+)\,(180,450,540)\,(+)\,(60,60,120)\,(+)\,(450,720,810) =\\ &= (930,1580,2050), \qquad \xi_{32} = 3070\,,\end{aligned}$$

(9.86)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60 —	60 +		120
C			+	(30) —	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.87)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30	90		120
C			30		90	120
	40	50	70	90	90	

(9.88)

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{Z}_{33} = {} & (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4)\ (+)\ (30)\ (2,3,4)\ (+) \\
& (+)\ (90)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (6,6,6)\ (+)\ (90)\ (5,8,9) = \\
= {} & (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (10,20,40)\ (+)\ (60,90,120)\ (+) \\
& (+)\ (180,450,540)\ (+)\ (180,180,180)\ (+)\ (450,720,810) = \\
= {} & (1050,1670,2080), \quad \xi_{33} = 3235\,.
\end{aligned}
$$

Такой путь дает возможность улучшения решения при переходе от (9.63) к (9.78), и при этом суммарные затраты изменяются от $\xi_{\underset{\sim}{Z}} = 3070$ до $\xi_{\underset{\sim}{Z}} = 3010$, что соответствует переходу от

(9.89) $\qquad \underset{\sim}{Z} = (960,\ 1550,\ 2080)$

к

(9.90) $\qquad \underset{\sim}{Z} = (1080,\ 1430,\ 2080)$.

Итак, выбираем решение (9.78), которое по оценке ξ приводит к (9.90). Продолжаем процесс, начиная с (9.78):

(9.91)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —	+		100
B			60 +		60 —	120
C				90 —	30 +	120
	40	50	70	90	90	

(9.92)

	1	2	3	4	5	
A	40	50		10		100
B			70		50	120
C				80	40	120
	40	50	70	90	90	

$$(9.93)\quad \underset{\sim}{Z}_{14} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(3,6,6)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)$$
$$(+)\,(50)\,(6,7,7)\,(+)\,(80)\,(3,4,8)\,(+)\,(40)\,(5,8,9) =$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(30,60,60)\,(+)\,(140,210,280)\,(+)$$
$$(+)\,(300,350,350)\,(+)\,(240,320,640)\,(+)\,(200,320,360) =$$
$$= (1080,1470,2080), \qquad \xi_{14} = 3050\,,$$

(9.94)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —		+	100
B			60 +		60 —	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.95)

	1	2	3	4	5	
A	40	50			10	100
B			70		50	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

$$(9.96)\quad \underset{\sim}{Z}_{15} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(8,9,12)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)$$
$$(+)\,(50)\,(6,7,7)\,(+)\,(90)\,(3,4,8)\,(+)\,(30)\,(5,8,9) =$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(80,90,120)\,(+)$$
$$(+)\,(140,210,280)\,(+)\,(300,350,350)\,(+)\,(270,360,720)\,(+)$$
$$(+)\,(150,240,270) =$$
$$= (1110,1460,2130), \qquad \xi_{15} = 3080\,,$$

(9.97)

	1	2	3	4	5	
A	40 —	50	10 +			100
B	+		60 —		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.98)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	40		20		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.99) $\underset{\sim}{Z}_{21} = (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(1,2,4)\,(+)\,(40)\,(5,6,7)\,(+)\,(20)\,(2,3,4)\,(+)$
$(+)\,(60)\,(6,7,7)\,(+)\,(90)\,(3,4,8)\,(+)\,(30)\,(5,8,9) =$
$= (50,50,150)\,(+)\,(50,100,200)\,(+)\,(200,240,280)\,(+)$
$(+)\,(40,60,80)\,(+)\,(360,420,420)\,(+)\,(270,360,720)\,(+)$
$(+)\,(150,240,270) =$
$= (1120,1470,2120), \qquad \xi = 3090\,,$

(9.100)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 —	10 +			100
B		+	60 —		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.101)

	1	2	3	4	5	
A	40		60			100
B		50	10		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.102) $\underset{\sim}{Z}_{22} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(60)\,(1,2,4)\,(+)\,(50)\,(2,4,7)\,(+)\,(10)\,(2,3,4)\,(+)$
$(+)\,(60)\,(6,7,7)\,(+)\,(90)\,(3,4,8)\,(+)\,(30)\,(5,8,9) =$
$= (120,160,240)\,(+)\,(60,120,240)\,(+)\,(100,200,350)\,(+)$
$(+)\,(20,30,40)\,(+)\,(360,420,420)\,(+)\,(270,360,720)\,(+)$
$(+)\,(150,240,270) = (1080,1530,2280), \quad \xi_{22} = 3210\,,$

(9.103)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	+	60 —	120
C				90 —	30 +	120
	40	50	70	90	90	

(9.104)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.105) $\underset{\sim}{Z}_{24} = (960,1550,2080), \qquad \xi_{24} = 3070,$

(9.106)

	1	2	3	4	5	
A	40 $-$	50	10 $+$			100
B			60 $-$		60 $+$	120
C	$+$			90	30 $-$	120
	40	50	70	90	90	

(9.107)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.108)
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Z}_{31} &= (10)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+) \\ &\quad (+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) = \\ &= (30,40,60)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(40,80,160)\,(+) \\ &\quad (60,90,120)\,(+) \\ &\quad (+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\,(270,360,720) = \\ &= (1050,1400,2020), \qquad \xi_{31} = 2935, \end{aligned}$$

(9.109)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 $-$	10 $+$			100
B			60 $-$		60 $+$	120
C		$+$		90	30 $-$	120
	40	50	70	90	90	

(9.110)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

$$(9.111)\quad \underset{\sim}{Z}_{32} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(20)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4\;\;(+)$$
$$(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,2,4)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(20,20,60)\,(+)\,(40,80,160)\,(+)$$
$$(+)\,(60,90,120)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,60,120)\,(+)$$
$$(+)\,(270,360,720) = (1110,1400,2050), \qquad \xi_{32} = 2980\,,$$

(9.112)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60 −		60 +	120
C			+	90	30 −	120
	40	50	70	90	90	

(9.113)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30		90	120
C			30	90		120
	40	50	70	90	90	

$$(9.114)\quad \underset{\sim}{Z}_{33} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)$$
$$(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(6,6,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(10,20,40)\,(+)$$
$$(+)\,(60,90,120)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(180,180,180)\,(+)$$
$$(+)\,(270,360,720) = (1230,1490,2080), \qquad \xi_{33} = 3145$$

В результате при (9.107) получаем еще лучшее решение:

$$(9.115)\qquad \underset{\sim}{Z} = (1050,\ 1400,\ 2020) \text{ с } \xi = 2935.$$

Продолжаем процесс, начиная с (9.107):

(9.116)

	1	2	3	4	5	
A	10 −	50	40	+		100
B			30		90	120
C	30 +			90 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.117)

	1	2	3	4	5	
A		50	40	10		100
B			30		90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.118)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{14} &= (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(10)\,(3,6,6)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)\\ &\quad (+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(80)\,(3,4,8) =\\ &= (50,50,150)\,(+)\,(40,80,160)\,(+)\,(30,60,60)\,(+)\\ &(+)\,(60,90,120)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(80,\ 200,\ 240)\,(+)\\ &(+)\,(240,320,640) = (1040,1430,2000), \qquad \xi_{14} = 2950\,,\end{aligned}$$

(9.119)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40 —		+	100
B			30 +		90 —	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.120)

	1	2	3	4	5	
A	10	50			40	100
B			70		50	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.121)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{15} &= (10)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(8,9,12)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)\\ &\quad (+)\,(50)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =\\ &= (30,40,60)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(320,360,480)\,(+)\\ &(+)\,(140,210,280)\,(+)\,(300,350,350)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\\ &(+)\,(270,360,720) = (1170,1520,2220), \qquad \xi_{15} = 3215\end{aligned}$$

(9.122)

	1	2	3	4	5	
A	10 —	50	40 +			100
B	+		30 —		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.123)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	10		20		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.124) $\underset{\sim}{Z}_{21} = (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(1,2,4)\,(+)\,(10)\,(5,6,7)\,(+)\,(20)\,(2,3,4)\,(+)$
$(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =$
$= (50,50,150)\,(+)\,(50,100,200)\,(+)\,(50,60,70)\,(+)\,(40,60,80)\,(+)$
$(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\,(270,360,720) =$
$= (1060,1410,2030), \qquad \xi_{21} = 2955\,,$

(9.125)

	1	2	3	4	5	
A	10	50 −	40 +			100
B		+	10 −		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.126)

	1	2	3	4	5	
A	10	20	70			100
B		30			90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.127) $\underset{\sim}{Z}_{22} = (10)\,(3,4,6)\,(+)\,(20)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,4,7)\,(+)$
$(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =$
$= (30,40,60)\,(+)\,(20,20,60)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)$
$(+)\,(60,120,210)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)$
$(+)\,(270,360,720) = (1050,1460,2140), \qquad \xi_{22} = 3055\,,$

(9.128)

	1	2	3	4	5	
A	10 −	50	40 +			100
B			30 −	+	90	120
C	30 +			90 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.129)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.130)
$$\underset{\sim}{Z}_{24} = (50)\,(1,1,3)\;(+)\;(50)\,(1,2,4)\;(+)\;(20)\,(2,3,4)\;(+)\;(10)\,(2,5,6)\;(+)$$
$$(+)\;(90)\,(6,7,7)\;(+)\;(40)\,(2,5,6)\;(+)\;(80)\,(3,4,8) =$$
$$= (50,50,150)\;(+)\;(50,100,200)\;(+)\;(40,60,80)\;(+)\;(20,50,60)\;(+)$$
$$(+)\;(540,630,630)\;(+)\;(80,200,240)\;(+)\;(240,320,640) =$$
$$= (1020,1410,2000), \qquad \xi_{24} = 2920\,,$$

(9.131)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50 —	40			100
B			30		90	120
C	—	+		90		120
	40	50	70	90	90	

(9.132)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

(9.133) $\underset{\sim}{Z}_{32} = (1100,1400,2050), \qquad \xi_{32} = 2980\,,$

(9.134)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50	40 —			100
B			30		90	120
C	30 —		+	90		120
	40	50	70	90	90	

(9.135)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30		90	120
C			30	90		120
	40	50	70	90	90	

(9.136) $\underset{\sim}{Z}_{33} = (1230{,}1490{,}2080), \qquad \xi_{33} = 3145,$

(9.137)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50	40 —			100
B			30 +		90 —	120
C	30 —			90	+	120
	40	50	70	90	90	

(9.138)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.139) $\underset{\sim}{Z}_{35} = (1080{,}1430{,}2080), \qquad \xi_{35} = 3010 .$

В результате при (9.129) получаем улучшение

(9.140) $\underset{\sim}{Z} = (1020,\ 1410,\ 2000)$ с $\xi = 2920$.

Продолжаем процесс, начиная с (9.129):

(9.141)

	1	2	3	4	5	
A	+	50	50 —			100
B			20 +	10 —	90	120
C	40 —			80 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.142)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.143) $\underset{\sim}{Z}_{11} = (1050, 1400, 2020), \qquad \xi_{11} = 2935$,

(9.144)

	1	2	3	4	5	
A		50	50 —	+		100
B			20 +	10 —	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.145)

	1	2	3	4	5	
A		50	40	10		100
B			30		90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.146) $\underset{\sim}{Z}_{14} = (1040, 1430, 2000), \qquad \xi_{14} = 2950$,

(9.147)

	1	2	3	4	5	
A		50	50 —		+	100
B			20 +	10	90 —	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.148)

	1	2	3	4	5	
A		50			50	100
B			70	10	40	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.149) $$\underset{\sim}{Z}_{15} = (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(8,9,12)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\,(40)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(80)\,(3,4,8) =$$
$$= (50,50,150)\,(+)\,(400,450,600)\,(+)\,(140,210,280)\,(+)$$
$$(+)\,(20,50,60)\,(+)\,(240,280,280)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)$$
$$(+)\,(240,320,640) = (1170,1560,2250), \qquad \xi_{15} = 3270,$$

(9.150)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	+		20	10 —	90	120
C	40 —			80 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.151)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	10		20		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.152) $\underset{\sim}{Z}_{21} = (1060,1410,2030), \qquad \xi_{21} = 2955,$

(9.153)

	1	2	3	4	5	
A		50 —	50 +			100
B		+	20 —	10	90	120
C	40	.		80		120
	40	50	70	90	90	

(9.154)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		20		10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.155)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{22} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(20)\,(2,4,7)\,(+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\\ &\quad (+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(80)\,(3,4,8) =\\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(40,80,140)\,(+)\\ &\quad (+)\,(20,50,60)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\\ &\quad (+)\,(240,320,640) = (1020,1450,2080), \qquad \xi_{22} = 3000\,,\end{aligned}$$

(9.156)

	1	2	3	4	5	
A		50 −	50 +			100
B			(20) −	10 +	90	120
C	40	+		80 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.157)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				30	90	120
C	40	20		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.158)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{32} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\\ &\quad (+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(2,2,4)\,(+)\,(60)\,(3,4,8) =\\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\\ &\quad (+)\,(540,630,630)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(40,40,80)\,(+)\\ &\quad (+)\,(180,240,480) = (1000,1430,1980), \qquad \xi_{32} = 2920\,,\end{aligned}$$

(9.159)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			(20) −	10 +	90	120
C	40		+	80 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.160)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B				30	90	120
C	40		20	60		120
	40	50	70	90	90	

(9.161) $\underset{\sim}{Z}_{33} = (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)$
$(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(6,6,6)\,(+)\,(60)\,(3,4,8) =$
$= (50,50,150)\,(+)\,(50,100,200)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)$
$(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(120,120,120)\,(+)$
$(+)\,(180,240,480) = (1080,1490,2000), \qquad \xi_{33} = 3030$,

(9.162)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10 +	90 —	120
C	40			80 —	+	120
	40	50	70	90	90	

(9.163)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	90	10	120
C	40				80	120
	40	50	70	90	90	

(9.164) $\underset{\sim}{Z}_{35} = (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(1,2,4)\,(+)\,(20)\,(2,3,4)\,(+)$
$(+)\,(90)\,(2,5,6)\,(+)\,(10)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(80)\,(5,8,9) =$
$= (50,50,150)\,(+)\,(50,100,200)\,(+)\,(40,60,80)\,(+)$
$(+)\,(180,450,540)\,(+)\,(60,70,70)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)$
$(+)\,(400,640,720) = (860,1570,2000), \qquad \xi_{35} = 3000$.

Найдено новое решение (9.157) или эквивалентное ему решение (9.129), соответствующее $\xi = 2920$, для которого

(9.165) $\underset{\sim}{Z} = (1000,\ 1430,\ 1980)$.

По второму критерию (величине максимальной достоверности) решение (9.129) предпочтительнее, чем (9.157), так как $1410 < 1430$.

Здесь в принципе можно было бы остановиться. Однако для того, чтобы убедиться, что невозможно найти другое эквивалентное относительно ξ решение, продолжим процесс, начиная с (9.157).

(9.166)

	1	2	3	4	5	
A	+	30 −	70			100
B				30	90	120
C	40 −	20 +		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.167)

	1	2	3	4	5	
A	30		70			100
B				30	90	120
C	10	50		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.168) $$\underset{\sim}{Z}_{11} = (30)\,(3,4,6)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)$$
$$(+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(60)\,(3,4,8) =$$
$$= (90,120,180)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)$$
$$(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(20,50,60)\,(+)\,(100,100,200)\,(+)$$
$$(+)\,(180,240,480) = (1060,1430,2010), \qquad \xi_{11} = 2965,$$

(9.169)

	1	2	3	4	5	
A		30 −	70	+		100
B				30	90	120
C	40	20 +		60 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.170)

	1	2	3	4	5	
A			70	30		100
B				30	90	120
C	40	50		30		120
	40	50	70	90	90	

(9.171) $$\underset{\sim}{Z}_{14} = (70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,6,6)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)$$
$$(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,4,8) =$$
$$= (70,140,280)\,(+)\,(90,180,180)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)$$
$$(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(80,200,240)\,+\,(100,100,200)\,(+)$$
$$(+)\,(90,120,240) = (1030,1520,1950), \qquad \xi_{14} = 3010,$$

(9.172)

	1	2	3	4	5	
A		30 −	70		+	100
B				30 +	90 −	120
C	40	20 +		60 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.173)

	1	2	3	4	5	
A			70		30	100
B				60	60	120
C	40	50		30		120
	40	50	70	90	90	

(9.174)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{15} &= (70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(8,9,12)\,(+)\,(60)\,(2,5,6)\,(+)\,(60)\,(6,7,7)\,(+)\\ &\quad(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,4,8) =\\ &= (70,140,280)\,(+)\,(240,270,360)\,(+)\,(120,300,360)\,(+)\\ &(+)\,(360,420,420)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(100,100,200)\,(+)\\ &(+)\,(90,120,240) = (1060,1550,2100), \qquad \xi_{15} = 3130\,,\end{aligned}$$

(9.175)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B	+			30 −	90	120
C	40 −	20		60 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.176)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B	30				90	120
C	10	20		90		120
	40	50	70	90	90	

(9.177)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{21} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(5,6,7)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\\ &\quad(+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(2,2,4)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) =\\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(150,180,210)\,(+)\\ &(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(20,50,60)\,(+)\,(40,40,80)\,(+)\\ &(+)\,(270,360,720) = (1120,1430,2070), \qquad \xi_{21} = 3025\,,\end{aligned}$$

(9.178)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		+		30 —	90	120
C	40	20 —		60 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.179)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		20		10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.180) $\underset{\sim}{Z}_{22} = (1020, 1450, 2080), \qquad \xi_{22} = 3000,$

(9.181)

	1	2	3	4	5	
A		30 +	70 —			100
B			+	30 —	90	120
C	40	20 —		60 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.182)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.183) $\underset{\sim}{Z}_{23} = (1020, 1410, 2000), \qquad \xi_{23} = 2920,$

(9.184)

	1	2	3	4	5	
A		30 +	70 —			100
B				30	90	120
C	40	20 —	+	60		120
	40	50	70	90	90	

(9.185)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B				30	90	120
C	40		20	60		120
	40	50	70	90	90	

(9.186) $\underset{\sim}{Z}_{33} = (1080, 1490, 2000)$.

(9.187) $\xi_{33} = 3030$,

(9.188)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				30 +	90 —	120
C	40	20		60 —	+	120
	40	50	70	90	90	

(9.189)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				90	30	120
C	40	20			60	120
	40	50	70	90	90	

(9.190)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{35} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(90)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(6,7,7)\,(+)\\ &\quad (+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(2,2,4)\,(+)\,(60)\,(5,8,9) =\\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(180,450,540)\,(+)\\ &\quad (+)\,(180,210,210)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(40,40,80)\,(+)\\ &\quad (+)\,(300,480,540) = (880,1550,1980), \qquad \xi_{35} = 2980.\end{aligned}$$

В итоге на вершинах симплекса, определенного в (9.157), находится решение (9.182), эквивалентное (9.129). Прекращаем процесс и в качестве наилучшего решения выбираем (9.129), для которого имеем

(9.191) $\quad \underset{\sim}{Z} = (1020,\ 1410,\ 2000)$ с $\xi = 2920$.

Необходимо сделать некоторые замечания относительно использованного выше процесса.

1. Почему при нечетких данных в описанном процессе в течение всего stepping-stone не фигурировали δ_{ij} (отклонения стоимостей перевозок единицы продукции)? Объясним это с помощью примера.

Вновь возьмем (9.14), но с нечеткими данными (9.62). Получим:

(9.192)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60 —1	+1	120
C				30 +1	90 —1	120
	40	50	70	90	90	

(9.193)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

Используя δ_{12}, определим

(9.194) $\quad \underset{\sim}{\delta}_{25} = (6,7,7)\ (—)\ (5,8,9)\ (+)\ (3,4,8)\ (—)\ (2,5,6) = (—6,—2,8)$,

(9.195) $\quad \xi_{\underset{\sim}{\delta}_{25}} = —1$.

С другой стороны, с помощью (9.193) и (9.62) рассчитывается НЧТ, которое представляет собой нечеткое значение вновь полученного решения. Имеем:

(9.196) $\quad \underset{\sim}{Z}_{25} = (1080,\ 1430,\ 2080)$,

(9.197) $\quad \xi_{\underset{\sim}{Z}_{25}} = 3010$.

Перейдем к (9.80):

(9.198)

	1	2	3	4	5	
A	40 / —1	50	10 / +1			100
B			60 / —1	60 / +1		120
C	+1			30 / —1	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.199)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30	90		120
C	30				90	120
	40	50	70	90	90	

Используя δ_{ij}, получим :

(9.200) $\underset{\sim}{\delta}_{31} = (2,5,6)\ (—)\ (3,4,8)\ (+)\ (2,5,6)\ (—)\ (2,3,4)\ (+)\ (1,2,4)\ (—)$
$(—)\ (3,4,6) = (5,12,16)\ (—)\ (8,11,18) = (—13,1,8)$,

(9.201) $\xi_{\underset{\sim}{\delta}_{31}} = —1,5$.

С другой стороны, с помощью (9.199) и (9.62) рассчитываем:

(9.202) $\underset{\sim}{Z}_{31} = (870,\ 1580,\ 2020)$,

(9.203) $\xi_{\underset{\sim}{Z}_{31}} = 3025$.

Эти данные показывают, что в области нечеткости δ_{ij} не являются хорошими критериями отбора для изменения решения на вершинах симплекса. По (9.201) $\xi_{\underset{\sim}{\delta}_{31}} = —1,5$, что меньше, чем $\xi_{\underset{\sim}{\delta}_{25}} = —1$ из (9.195), и решение (9.199) предпочтительнее, чем (9.193). Однако, сравнивая решения (9.196) и (9.202) посредством (9.197) и (9.203), приходим к выводу, что необходимо выбрать (9.193) вместо (9.199). Это абсолютно понятно, если найти разность между этими НЧТ (по формуле (9.58)). В итоге нужно вычислять $\xi_{\underset{\sim}{Z}}$ вместо ξ_{δ}.

2. Как известно, в нечетких числах (в форме НЧТ или любой другой), понятие минимума (и максимума) имеет смысл только тогда, когда нечет-

кие числа полностью упорядочены, что редко встречается на практике. В этом случае было бы необходимо выполнить преобразование (например, (9.61)), обеспечивающее полный порядок. Как это уже было указано, полный порядок не единственен, и поэтому возникает необходимость использовать для разделения двух равных какой–либо второй критерий (например, критерий, соответствующий максимальной достоверности). Если и этого недостаточно, то можно выбрать нечеткое число с наименьшим отклонением.

3. Можно автоматически, исходя из ξ, перевезти нечеткие данные (такие, как (9.62)) в точные. Это обеспечит необходимую оптимизацию, но при таком подходе с самого начала исчезают свойства, которые хотелось бы учитывать до конца. В этом и заключается суть неопределенности.

Существует большое количество вариантов ss-метода * для их преобразования в нечеткие данные.

Можно поставить и другой вопрос: как оперировать с произвольными числами? В этом случае следует пройти по α-сечениям, например 11 сечений $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.8, 0.9, 1.0$, и осуществить вложение результатов, что однако не всегда легко сделать.

Имеется большое количество формальных и/или нечетких транспортных задач. Например, предложение и/или спрос могут быть нечеткими; т. е. могут одновременно присутствовать разные критерии : себестоимость, длительность, безопасность и т. д. В сложных случаях следует перейти от stepping–stone к нечеткому линейному программированию, как это сделано с точки зрения общей перспективы Циммерманом.

В заключение следует добавить, что в этом методе априорно предполагается, что оптимум находится на одной из вершин симплекса. Если также иметь в виду (9.2) и производить замену соответствующих чисел на НЧТ, цель оптимизации можно рассматривать относительно трех критериев, выбирая 1, 2, 1 (как в 9.61): 1 — для наименьших значений, 2 — для значений максимальной достоверности; 1 — для наибольших значений. Тогда можно воспользоваться методом Циммермана, и минимум общих затрат транспортной задачи может располагаться не в вершине симплекса. В таком случае достаточно ввести произвольные функции принадлежности, обоснованные иногда самой природой задачи. Как уже было отмечено ранее, применение различных видов нечеткости не всегда приводит к подлинной оптимизации. Этот факт соответствует самой сути проводимых исследовательских работ.

---

* Кофман А. Методы и модели исследования операций. // C.E.C.S.A. T. 1, разд. 17.

ГЛАВА 10. ДОЛГОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

10.1. Проблема прогнозирования на предприятиях

Сатурн одарил Януса способностью видеть прошлое и будущее, и поэтому последнего изображают с двумя лицами: одно из них смотрит в прошлое, а другое-в будущее. Так же образно можно было бы представить и тех, чья деятельность связана с прогнозированием.

В настоящее время для прогнозирования используются модели, основанные на гипотезах, правильность которых может быть проверена на различных фактах и/или данных, характеризующих изучаемое явление в более или менее удаленном прошлом. Очевидно, что разнообразие используемых моделей существенно зависит от предметной области и преследуемых при этом целей. Современная наука (модели и методы теории вероятностей и статистики, процедуры анализа временных рядов, случайные модели эволюции и др.) способна дать соответствующий инструмент анализа и прогнозирования. Однако возможность применения этого инструментария ограничена, поскольку информация о предметной области, как правило, еще недостаточно структурирована для ее непосредственного использования в моделях прогнозирования. Вместе с тем именно такая информация преобладает в данных экономического характера о предприятиях.

Человек XX века живет в системе, которая порождает неисчислимое количество информации. При этом роль прогнозирования постоянно возрастает, чему, естественно, способствует наметившийся прогресс в методах прогнозирования и в развитии современных компьютеров. Поэтому чем больше мы прибегаем к расчетам и программированию для обработки структурированной информации, тем больше наше воображение требует новых оценок. В соотношении «информация — выражение», которое составляет саму природу человека, может существовать определенная несбалансированность между входящими в него элементами. Чем больше информации мы имеем, тем большая потребность в ее выражении. Существующее неравновесие привело бы к «человеку-роботу» вследствие избытка определенного количества информации при отсутствии возможности ее выражения или к «человеку джунглей» в противном случае. Именно поэтому в современном мире все большее значение приобретает интуиция. Интуиция, как непрограммируемое рассуждение, является неточной, нечеткой, развивающейся и тем не менее она превосходит возможности существующих средств обработки информации.

Разработка экономической политики предприятия основывается прежде всего на долгосрочной оценке базовых данных. Это позволяет выбрать те направления действий, которые обеспечивали бы достижение заданных количественно целей. Поскольку эти цели находятся в будущем, прогнозирование представляется важнейшим элементом управления предприятием. Прогнозирование будущего предприятий связано со значительными трудностями, возникающими уже с момента выбора базовых понятий, на которых должно основываться последующее развитие. Примером является попытка отделить понятие предвидения от прогнозирования и изыскания. С технической точки зрения предвидение предусматривает возможность изучения определенных аспектов будущего на основе известных законов и логических связей. Прогнозирование, напротив, связано с процессами оценки на основе прошлого, которое нельзя механически перенести в будущее. Именно поэтому наиболее пригодные схемы лежат в области случайности или неопределенности.

Классические методы прогнозирования, основанные на механистическом детерминизме и справедливые для стабильной экономической системы, должны были уступить место другим, которые лучше отражают действительность с ее быстрыми изменениями и постоянной эволюцией. Но и для новых методов прошлое играет определенную роль, поскольку любой процесс структуризации или оценки не свободен от «опыта» осуществляющего его специалиста. Возникает определенный риск, связанный с тем, что слишком большое значение придается факторам прошлого при их переносе в будущее. Последнее может претерпеть существенное изменение как со стороны внешних факторов, так и в связи с вмешательством воли человека. Определенная часть предприятий включает в свои структуры экспертов. Их задача заключается в предсказании того, каким будет предприятие через несколько лет, т. е. в долгосрочном будущем. При этом коммерческое, финансовое, технологическое состояние, связанное с персоналом и т. п., определяется независимо от процессов перехода из текущего состояния в будущее. В рамках этой системы определяются факторы, внешние по отношению к предприятию, влияющие на среду развития его будущей деятельности. Именно они обуславливают выживаемость предприятия. Среди элементов такой среды можно отметить законодательство, структуру общества, слои населения, техническое развитие и т. п. Речь идет об изучении перспектив оценки будущего,исходя из общепринятых принципов, не зависящих от прошлого. С этой точки зрения поисковые исследования позволяют добиться весомых результатов, так как они в меньшей степени зависят от реальной действительности. В этом плане важны методологические изменения, связанные с развитием поисковых методов и их возможностей при управлении предприятием. Можно допустить, что качество прогнозирования у группы экспертов будет выше, чем у отдельно взятого специалиста. Однако это возможно при условии, что работа группы будет организована соответствующим образом, чтобы подтвердился принцип: «Одна голова хорошо, а две лучше». Когда несколько человек высказывают свое мнение в рамках одной задачи, определяющим является специфическое знание каждого о конкретной ситуации. Это, наверное, тот субъективный элемент, который трудно устранить.

Метод, который предстоит нам рассмотреть, ставит перед собой цель выработать подход, где группа является центральной фигурой, способной дать скорректированный и статистически обоснованный прогноз. Метод Дельфи, используемый в системе опросов, удовлетворяет трем основным параметрам: анонимности, контролируемой обратной связи и статистически обоснованному ответу. Однако в связи с различиями в ментальности каждой страны и даже каждого предприятия следует соответствующим образом подойти к схеме Дельфи для ее адаптации к потребностям конкретного момента и места. Одной из особенностей исследовательских работ является то, что находки порождают изучение других проблем, а это дает толчок к постоянному прогрессу науки.

10.2. Метод Дельфи

Метод Дельфи — это метод научного и технического прогнозирования, который появился благодаря работам группы американских исследователей из РЕНДКорпорейшен в Санта Моника (Калифорния). Среди наиболее активных членов этой группы выделяются О. Хелмер, Е. С. Квайд и Н. Долкей. Базовая схема была опубликована впервые, вероятно, в 1964 году.

Для иллюстрации метода рассмотрим учебный пример. В 1966 году сорока экспертам потребовалось оценить, начиная с какого года в будущем вместо потребления бензина для автомобилей будут использоваться другие виды горючего при условии равной вероятности этих событий. Похожий вопрос, действительно, имел место, хотя на самом деле он формулировался несколько иначе, но в данном примере мы сознательно его упростили. Необходимо также отметить, что вводимая здесь вероятность является произвольной. Предполагалось, что указанным экспертам, не имеющим между собой никаких контактов, были присвоены соответствующие номера, для того чтобы сделать их анонимными. На поставленный вопрос они ответили следующим образом:

(1) 1981 , (2) 2000 , (3) 1983 , (4) 1994,
(5) 1978 , (6) 1980 , (7) 1980 , (8) 1982,
(9) 1979 , (10) 1982 , (11) 2005 , (12) 1973,
(13) 1975 , (14) 1981 , (15) 1988,
(16) 1995 , (17) 1989 , (18) 1972 , (19) 1982 , (20) 1989,
(21) 1988 , (22) 1980 , (23) 1982 , (24) 1983 , (25) 1985,
(26) 1992 , (27) 1982 , (28) 1973 , (29) 2010 , (30) 1980,
(31) 1982 , (32) 1973 , (33) 1981 , (34) 1984 , (35) 1986,
(36) 1991 , (37) 2000 , (38) 1979 , (39) 1987 , (40) 1974.

Гистограмма, соответствующая этим данным, представлена на рис. 10.1.

Рис. 10.1

Первая квантиль располагается около 1980 года, средняя находится приблизительно в 1982 и третий — очень близко к 1990 году, что дает (1980, 1982, 1990). Очевидно, что в настоящее время эти оценки кажутся нам чрезмерно оптимистичными. По мнению специалистов, в методе Дельфи проявилась реакция статистической осведомленности группы экспертов (которые не поддерживали контактов между собой). Далее уже при известных значениях трех квантилей (1980, 1982, 1990) сорок экспертов выдали новую серию данных:

(1) 1985 ,	(2) 1995 ,	(3) 1990 ,	(4) 1983 ,	(5) 1982 ,
(6) 1980 ,	(7) 1980 ,	(8) 1982 ,	(9) 1978 ,	(10) 1984,
(11) 1990 ,	(12) 1981 ,	(13) 1985 ,	(14) 1982 ,	(15) 1981,
(16) 1995 ,	(17) 1989 ,	(18) 1974 ,	(19) 1982 ,	(20) 1988,
(21) 1984 ,	(22) 1981 ,	(23) 1982 ,	(24) 1984 ,	(25) 1984 ,
(26) 1983 ,	(27) 1982 ,	(28) 1974 ,	(29) 2000 ,	(30) 1980,
(31) 1982 ,	(32) 1982 ,	(33) 1981 ,	(34) 1982 ,	(35) 1985 ,
(36) 1987 ,	(37) 1995 ,	(38) 1980 ,	(39) 1988 ,	(40) 1980 .

Получаем гистограмму, представленную на рис. 10.2, с первой квантилью около 1980 года, средней около 1982 и третьей приблизительно в 1985, т.е. (1980, 1982, 1985).

Рис. 10.2

Как и предполагалось, знание мнения остальных сократило амплитуду и привело к большему оптимизму. В других случаях, напротив, могла бы возникнуть более пессимистическая оценка. На практике всегда наблюдается сужение поля, куда стекаются данные.

Описанный выше пример приведен с чисто методической целью и не входит в набор прогнозов, сделаных РЕНД. Рассмотрим, каким образом РЕНД реализовывает свои эксперименты на разных этапах.

1. Каждого опрашиваемого эксперта просят в письменной форме ответить на вопрос, какие научные открытия и изобретения, по его мнению, могут осуществиться и/или желаемы в ближайшие пятьдесят лет.

2. Участникам предлагают определить временной отрезок $[T_0, T]$ (соответственно текущий и наиболее отдаленный моменты), на котором существует возможность реализации с вероятностью p ($p \geq 0.5$) каждого из выбранных изобретений, и указать, произойдет ли оно более чем через 50 лет или вообще не произойдет. Результаты классифицируются для определения трех значений: первой, средней второй и третьей квантилей, обозначаемых соответственно A,B,C . Далее отбираются только те результаты, для которых было получено разумное обоснование.

3. Участников информируют (письменно) о статистических результатах первого этапа. Затем организаторы опросов ведут диалог с экспертами, которые отказались высказаться на втором этапе, и с теми, кто значительно отклонился от мнения большинства. Определяются новые оценки, и некоторые из участников приближаются к точке зрения большинства. В конце этого этапа определяются три числа A', B', C' ,такие, что $C' - A' < C - A$, хотя это и не всегда возможно.

4. Последний этап заключается в повторении в случае необходимости предыдущего. Процесс продолжается до тех пор, пока влияние согласованности становится незначительным.

Рассмотрим реальный случай, над которым РЕНД работала в 1964—1965 г.г. На первом этапе для участия в работе пригласили 80 экспертов. Половина из них относилась к РЕНД. Для того чтобы наилучшим образом использовать знания экспертов, было образовано 6 групп. Некоторые из участников одновременно принадлежали к разным группам. В результате эксперты отобрали список из 49 тем. На втором этапе было определено, что $p = 0.5$ и $0 \leq T \leq 50$.Из 49 тем были согласованы 10. В течение третьего и четвертого этапов количество тем, относительно которых было достигнуто согласие, увеличилось до 30. Окончательный результат (процитируем лишь небольшой фрагмент) был следующим :

— разработка ресурсов дна океана (1980, 1989, 2000);

— возможность массового производства синтетических протеинов (1985, 1990, 2004);

— замена человеческих органов трансплантантами (1967, 1972, 1982);

— возможность использования лекарств для увеличения коэффициента умственных способностей (1984, 2012, 2030);

— машинный перевод текстов (1970, 1975, 1978);

— коррекция генетических нарушений (1990, 2000, 2040);

— использование телепатии как средства связи (2025, никогда, никогда).

Было апробировано большое количество вариантов изложенного метода. Нами будет предложена несколько иная схема, которая основана на нечетких числах треугольной формы.

10.3. Метод FUZZY-Дельфи

В предлагаемом методе связь с экспертами осуществляется так же, как и в обычном методе Дельфи, но процесс оценки значительно отличается. В настоящее время по отношению к проблеме прогнозирования можно сделать выводы, которые были невозможны в 1965 году.

1. Долгосрочный прогноз должен помещаться не в поле случайности, а в поле неопределенности. Использование вероятностей в этом случае не совсем адекватно действительности. Теория нечетких множеств наиболее применима, когда речь идет об оценке фактов, удаленных по времени.

2. Эксперты используют личные и субъективные знания. Этот вид знаний должен быть принят во внимание, и при оценке подобной субъективности следует использовать не случайность, а нечеткость. Однако, для того, чтобы получать более объективные оценки, следует пользоваться статистическими характеристиками множества, например использовать среднее и другие виды отклонений.

3. Предположим, что эксперту задается вопрос: можете ли вы при принципиальной возможности реализации какого-либо технического достижения назвать наиболее близкую дату его осуществления (не ранее), самую отдаленную дату (не позднее), дату, соответствующую уровню предположения, равному единице. Если задать вопрос так, чтобы существовала

возможность реализации в 0.5 и допускался анализ квантилей, это облегчает ответ.

4. При использовании нечетких чисел треугольной формы (и, если необходимо, нечетких чисел Л. Р. Дюбуа и Прада, которые их обобщают) эксперт может разработать соответствующие операции в области неопределенности, делая предположения о достижениях, которые должны структуризоваться во времени (особенно свертки maxmin для суммы чисел). Нечеткие числа треугольной формы из-за их простоты и понятности рекомендуется использовать для нематематиков. Необходимо подчеркнуть, что эти числа позволяют разработать очень простые программы. Это инструмент, который хорошо подходит для современных средств обработки информации и вполне пригоден для оценки опросов.

5. При использовании понятия «пучок нечетких чисел», которое мы определим ниже, а также теорем 1 и 2, можно легко уточнить оценки и получить новые поправки со стороны экспертов.

Существуют другие доводы в пользу того, что метод FUZZY-Дельфи оказывается адекватным при решении подобных задач. Проанализируем сначала некоторые аспекты подхода к нечеткости. Имеется n наблюдателей (n — конечное) за одним и тем же объектом, каждый из которых присваивает объекту нечеткое число $\underset{\sim}{A}_i$, $i = 1,2, \ldots,n$, не консультируясь ни с кем другим. Совокупность $\underset{\sim}{A}_i$ образует «пучок нечетких чисел» относительно рассматриваемого объекта. Имея в виду, что $\underset{\sim}{A}_i$ является субъективной оценкой наблюдателя i, необходимо, исходя из пучка, определить нечеткое число, которое наилучшим образом может представить n оценок и явиться наиболее объективной информацией.

При рассмотрении пересечения $\bigcap_i \underset{\sim}{A}_i$ можно заметить, что либо оно является пустым, либо его максимум настолько удален от 1, что оно не может быть принято в принципе. Поскольку желательно перейти от субъективной концепции к более объективной, в качестве нечеткого числа, связанного с пучком, примем «среднее нечеткое число», которое определим ниже.

Теорема 1.

Пусть имеется пучок из n нечетких чисел $\underset{\sim}{A}^{(i)} \subset R$, $i=1,2, \ldots,n$, где

$A_\alpha^{(i)} = [a_1^{(i)}, a_2^{(i)}]$ — α-сечение $\underset{\sim}{A}^{(i)}$. Если

$$\overset{m}{a}_1(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha) \quad , \quad \overset{m}{a}_2(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha)$$

и если

$$\overset{m}{A}_\alpha = [\overset{m}{a}_1(\alpha), \overset{m}{a}_2(\alpha)]$$

определяет α-сечение нечеткого множества $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$, то $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ — нечеткое число.

Для доказательства достаточно показать, что полученное $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ — выпуклое и нормальное.

Вначале докажем выпуклость. Для каждого $\underset{\sim}{A}^{(i)}$ можно записать

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([a_1^{(i)}(\alpha'), a_2^{(i)}(\alpha')] \subset [a_1^{(i)}(\alpha), a_2^{(i)}(\alpha)]),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е.

$$a_1^{(i)}(\alpha') \geq a_1^{(i)}(\alpha), \; a_2^{(i)}(\alpha') \leq a_2^{(i)}(\alpha),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку сегменты, из которых состоят α– сечения, суммируются сверткой maxmin, то имеем :

$$\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha') \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha') \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha) \quad ,$$

и,если поделить на n все члены, получим :

$$\overset{m}{a}_1(\alpha') \geq \overset{m}{a}_1(\alpha) \quad , \quad \overset{m}{a}_2(\alpha') \leq \overset{m}{a}_2(\alpha) \quad .$$

Это и доказывает выпуклость $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$.

Что касается нормальности, имеем :

$$A^{(i)}_{\alpha=1} = [a_1^{(i)}(\alpha = 1), \; a_2^{(i)}(\alpha = 1)] \neq \varnothing \; ,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

где

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha = 1), \; \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha = 1)\right] \neq \varnothing \; ,$$

14. Зак. 5395

и,таким образом,

$$\overset{m}{A}_{\alpha=1} = [\overset{m}{a}_1\ (\alpha = 1),\ \overset{m}{a}_2\ (\alpha = 1)\ ] \neq \varnothing\ .$$

Поскольку $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ выпуклое и нормальное, то это нечеткое число.

Рассмотрим пример 1. Предположим, что имеется пучок, образованный тремя нечеткими числами треугольной формы:

$$\underset{\sim}{A}_1 = (4,9,10),\ \underset{\sim}{A}_2 = (5,8,13),\ \underset{\sim}{A}_3 = (6,11,14),$$

представленными на рис. 10.3.

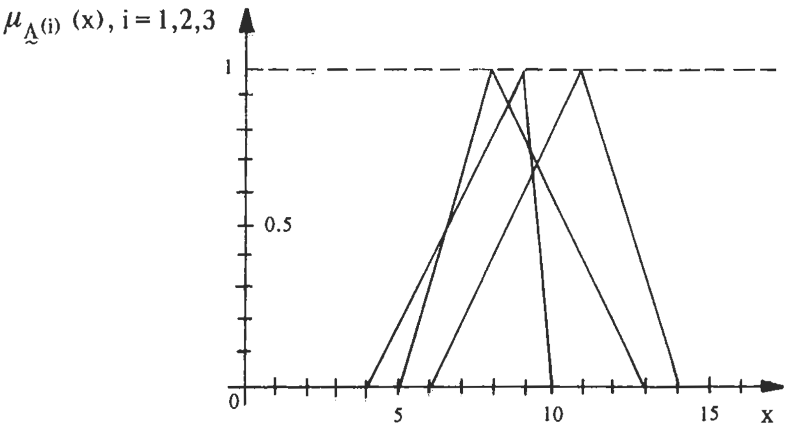


Рис. 10.3

Функции принадлежности заданных чисел при $\forall\ x \in R$ определяются по формулам и α-сечения имеют вид :

$$\mu_{\underset{\sim}{A}(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ \dfrac{x-4}{5}, & 4 < x \le 9, \\ 10-x, & 9 < x \le 10, \\ 0, & 10 < x, \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ \dfrac{x-5}{3}, & 5 < x \le 8, \\ \dfrac{-x+13}{5}, & 8 < x \le 13, \\ 0, & 13 < x, \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}(3)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6, \\ \dfrac{x-6}{5}, & 6 < x \le 11, \\ \dfrac{-x+14}{3}, & 11 < x \le 14, \\ 0, & 14 < x, \end{cases}$$

$\alpha \in [0, 1]$,

$A_{\alpha}^{(1)} = [4 + 5\alpha, 10-\alpha]$,

$$A_{\alpha}^{(2)} = [5 + 3\alpha\ ,\ 13 - 5\alpha\ ],$$

$$A_{\alpha}^{(3)} = [6 + 5\alpha\ ,\ 14 - 3\alpha\ ].$$

Рассчитаем

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = \frac{1}{3}\ ([4+5\alpha,\ 10-\alpha]\ (+)\ [5+3\alpha,\ 13-5\alpha]\ (+)\ [6+5\alpha,\ 14-3\alpha]) =$$

$$= \frac{1}{3}\ [15+13\alpha,\ 37-9\alpha] =$$

$$= \left[5 + \frac{13}{3}\alpha,\ \frac{37}{3} - 3\alpha\right]$$

Отсюда получаем

$$\mu_{\underset{\sim}{\overset{m}{A}}}(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le 5\ , \\ \dfrac{x-5}{13/3}\ , & 5 < x \le 9 1/3\ , \\ \dfrac{37-3x}{9}\ , & 9 1/3 < x \le 12 1/3\ , \\ 0\ , & 12 1/3 < x\ , \end{cases}$$

(рис. 10.4).

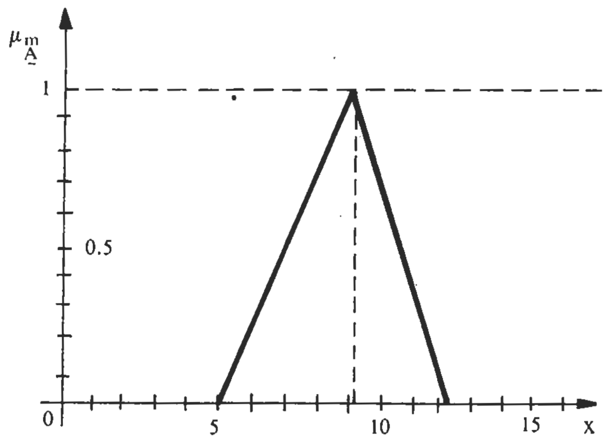


Рис. 10.4

Могут также использоваться специфические операции над нечеткими числами треугольной формы:

для данных $\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(3)}$

$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{3}\,(\underset{\sim}{A}^{(1)}\ (+)\ \underset{\sim}{A}^{(2)}\ (+)\ \underset{\sim}{A}^{(3)}) = \frac{1}{3}\,(4+5+6,\ 9+8+11,\ 10+13+14) =$$

$$= (5,\ 9\ 1/3,\ 12\ 1/3).$$

Если предположить, что пучок составлен из нечетких чисел, определенных в N или Z, то очевидно, что среднее нечеткое число может располагаться в R. Тогда целесообразно определить нечеткие числа пучка функциями принадлежности в форме лестницы, что всегда возможно.

Реализуем теперь сумму путем maxmin-свертки двух пучков нечетких чисел. Предположим, что первый образован нечеткими числами $\underset{\sim}{A}^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$, и второй — нечеткими чисами $\underset{\sim}{B}^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Можно сформулировать следующую теорему

Т е о р е м а 2.

Пусть один и тот же наблюдатель рассматривает два объекта и присваивает каждому из них нечеткие числа $\underset{\sim}{A}^{(i)}$ и $\underset{\sim}{B}^{(i)}$. Если maxmin-свертка этих чисел образуется относительно рассматриваемых объектов, то для n наблюдателей и заданных объектов

$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}}\ (+)\ \overset{m}{\underset{\sim}{B}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{A}^{(i)}\ (+)\ \underset{\sim}{B}^{(i)}) .$$

Действительно,

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha)\right],$$

$$\overset{m}{B}_{\alpha} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)}(\alpha),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_2^{(i)}(\alpha)\right],$$

$$\overset{m}{A}_\alpha \ (+)\ \overset{m}{B}_\alpha = \left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)}(\alpha)\right), \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} b_2^{(i)}(\alpha)\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_1^{(i)}(\alpha)+b_1^{(i)}(\alpha)), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_2^{(i)}(\alpha)+b_2^{(i)}(\alpha))\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_1^{(i)}(\alpha)+b_1^{(i)}(\alpha)), \sum_{i=1}^{n}(a_2^{(i)}(\alpha)+b_2^{(i)}(\alpha))\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_\alpha^{(i)} \ (+)\ B_\alpha^{(i)}), \qquad \alpha \in [0,\ 1] \, .$$

И по этим α-сечениям

$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} \ (+)\ \overset{m}{\underset{\sim}{B}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}^{(i)} \ (+)\ \underset{\sim}{B}^{(i)}) \, .$$

Это верно при любом конечном п.

Рассмотрим следующий пример 2. Для упрощения снова возьмем нечеткие числа треугольной формы :

$\underset{\sim}{A}^{(1)} = (4, 9, 10)$, $\underset{\sim}{A}^{(2)} = (5, 8, 13)$, $\underset{\sim}{A}^{(3)} = (6, 11, 14)$,

$\underset{\sim}{B}^{(1)} = (3, 7, 9)$, $\underset{\sim}{B}^{(2)} = (3, 6, 10)$, $\underset{\sim}{B}^{(3)} = (8, 9, 10)$,

$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} = (5, 9\tfrac{1}{3}, 12\tfrac{1}{3})$, $\overset{m}{\underset{\sim}{B}} = (4\tfrac{2}{3}, 7\tfrac{1}{3}, 9\tfrac{2}{3})$,

$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} \ (+)\ \overset{m}{\underset{\sim}{B}} = (9\tfrac{2}{3}, 16\tfrac{2}{3}, 22)$,

$\underset{\sim}{A}^{(1)} \ (+)\ \underset{\sim}{B}^{(1)} = (7,16,19)$,

$\underset{\sim}{A}^{(2)} \ (+)\ \underset{\sim}{B}^{(2)} = (8,14,23)$,

$\underset{\sim}{A}^{(3)} \ (+)\ \underset{\sim}{B}^{(3)} = (14,20,24)$,

$$\overbrace{(\underset{\sim}{A} \ (+)\ \underset{\sim}{B})}^{m} = \frac{1}{3}\ \{(7,\ 16,\ 19)\ (+)\ (8,\ 14,\ 23)\ (+)\ (14,\ 20,\ 24)\} =$$

$$= \frac{1}{3}\,(29,\ 50,\ 66) = (9\tfrac{2}{3},\ 16\tfrac{2}{3},\ 22).$$

Хотя приведенный пример тривиален, его уместно было привести для иллюстрации несложной теоремы 2.

Очень часто некоторые наблюдатели дают свою личную оценку одного и того же объекта, когда речь идет о доверительных интервалах и, особенно, о нечетких числах.

Перейдем к изложению метода FUZZY-Дельфи.

1. Каждого эксперта просят указать нечеткое число треугольной формы, которое оценивает дату свершения рассматриваемого события, так чтобы первое число задавало ближайшую дату, второе — дату, предположительно имеющую уровень 1, и третье — наиболее удаленную дату. Таким образом определится

$$(A_1^{(i)}, B_1^{(i)}, C_1^{(i)}),$$

где верхний индекс — номер, присвоенный эксперту, а нижний — первый этап оценки.

2. Пучок образуют числа

$$(A_1^{(i)}, B_1^{(i)}, C_1^{(i)}), \quad i = 1,2, \ldots, n,$$

где n — число экспертов. Затем расчитываются среднее нечеткое число треугольной формы

$$(\overset{m}{A}_1, \overset{m}{B}_1, \overset{m}{C}_1)$$

и для каждого эксперта i — отклонения

$$(\overset{m}{A}_1 - A_1^{(i)}, \overset{m}{B}_1 - B_1^{(i)}, \overset{m}{C}_1 - C_1^{(i)}),$$

которые могут быть положительными, отрицательными или нулевыми. Эти результаты сообщаются каждому эксперту только в той части, которая касается лично его.

3. Эксперты указывают новые нечеткие числа треугольной формы

$$(A_2^{(i)}, B_2^{(i)}, C_2^{(i)}),$$

и организаторы вновь переходят к пункту 2 на новом этапе. Снова начинаются корректировки, и это производится столько раз, сколько необходимо.

Если речь идет о последовательном пересечении, что часто имеет место при долгосрочном прогнозировании, используется maxmin-свертка для суммы, а иногда и нечеткий максимум. При этом необходимо иметь в виду, что максимум двух нечетких чисел треугольной формы не всегда является нечетким числом треугольной формы.

Рассмотрим чисто иллюстративный пример 3.

Исследуется случай конкретного технического приложения, и для этого у 12 экспертов (это число должно быть большим для реального случая) запрашивается их субъективная оценка на основе нечетких чисел треугольной формы.

Результаты первого этапа приведены в следующей таблице

Эксперты	Ближайшая дата	Предположительная дата с уровнем 1	Наиболее удаленная дата
1	1985	1993	2010
2	1982	1984	1990
3	1990	1995	2000
4	1982	1983	1984
5	1990	1995	2005
6	1985	2000	2005
7	2000	2008	2010
8	1985	1997	2003
9	1985	1992	1997
10	1998	1999	2010
11	2000	2010	2010
12	1984	1990	1995

Исходя из этого пучка, получают среднее нечеткое число

$$(\overset{m}{A}_1, \overset{m}{B}_1, \overset{m}{C}_1) = (1988.83,\ 1995.50,\ 2001.58) \cong$$

$$\cong (1988,\ 1995,\ 2001).$$

На рис 10.5 представлены $(\overset{m}{A}_1, \overset{m}{B}_1, \overset{m}{C}_1)$ и $(A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)})$:

$$\overset{m}{A}_1 - A_1^{(1)} = 1988 - 1985 = 3,$$

$$\overset{m}{B}_1 - B_1^{(1)} = 1995 - 1993 = 2,$$

$$\overset{m}{C}_1 - C_1^{(1)} = 2001 - 2010 = -9.$$

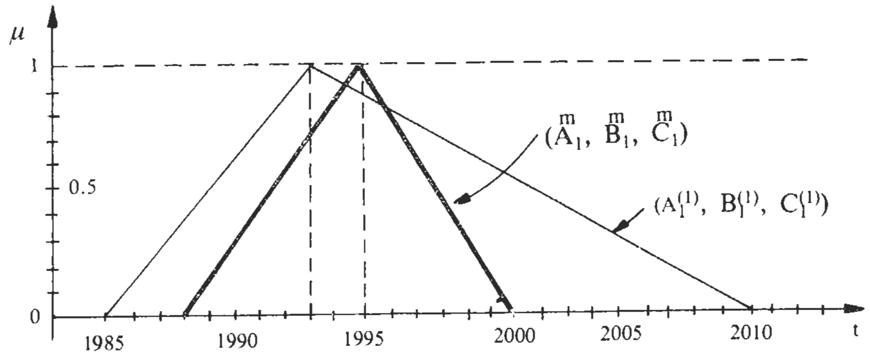


Рис. 10.5

Найденные отклонения должны позволить эксперту 1 сделать пересмотр своих прогнозов и предложить новое число треугольной формы для следующего этапа. Это справедливо и для остальных экспертов. При этом образуется новый пучок.

Процесс продолжается до достижения порога, заданного критерием останова. Возможно также заранее ограничить число этапов. Необходимо отметить, что если экспертам рекомендуется не удаляться от среднего нечеткого числа предшествовавшего луча, то можно доказать, что процесс сходится.

Интересно рассмотреть степень неподобия между двумя нечеткими числами треугольной формы. Для этого введем понятие расстояния. Напомним, что расстояния Хемминга и Евклида, как и обобщающее их расстояние Минковского, не очень пригодны для нечетких чисел. Сначала рассмотрим некоторые важные для нас предположения о нечетких числах треугольной формы.

Рассмотрим исходное множество $[a,b] \subset R$. Определяются нечеткие числа треугольной формы, полностью включенные в данное множество. Пусть

$$N_1(\alpha) = [a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}],$$

$$N_2(\alpha) = [a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

суть два нечетких числа треугольной формы, определяемых своими α –сечениями (рис. 10.6).

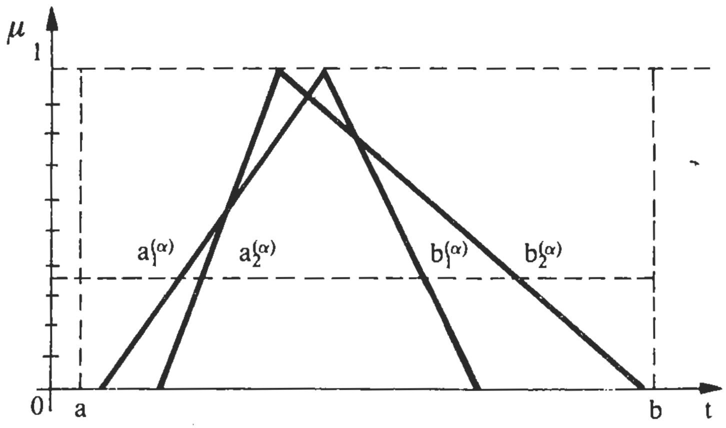


Рис. 10.6

Для этих двух нечетких чисел определим «линейное расстояние влево»

$$\Delta_{\text{л.}}(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{b-a}\int_0^1 |a_1(\alpha) - a_2(\alpha)|\, d\alpha$$

и «линейное расстояние вправо»

$$\Delta_{\text{п.}}(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{b-a}\int_0^1 |b_1(\alpha) - b_2(\alpha)|\, d\alpha .$$

Тогда «линейное расстояние» будет

$$\Delta(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\text{л.}}(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) + \Delta_{\text{п.}}(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2)\right).$$

Введение множителя 1/2 необходимо, чтобы $0 \le \Delta \le 1$ во всех случаях.

Легко проверить, что

1) $\Delta\,(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) \geq 0$,

2) $\Delta\,(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) = \Delta\,(\underset{\sim}{N}_2, \underset{\sim}{N}_1)$,

3) $\Delta\,(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_3) \leq \Delta\,(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) + \Delta\,(\underset{\sim}{N}_2, \underset{\sim}{N}_1)$,

4) $\Delta\,(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_1) = 0$,

если Δ определено через такие значения, как $\Delta_{л.}$, $\Delta_{п.}$ Экспертам целесообразно сообщить значения $\Delta_{л.}$, $\Delta_{п.}$, Δ.

Рассмотрим в виде примера 4 применение расстояний $\Delta_{л.}$, $\Delta_{п.}$, Δ по данным из примера 3.

Представим 12 нечетких чисел треугольной формы $(\underset{m}{A}{}_1^{(i)}, \underset{m}{B}{}_1^{(i)}, \underset{m}{C}{}_1^{(i)})$ со средним нечетким числом (A, B, C). Предположим, что исходное множество составляет 28 лет — [1982, 2010]. Оно выбрано произвольно. Поэтому те эксперты, которые указали слово «никогда», должны заменить его 2010 годом. Если это покажется слишком жестким, можно увеличить исходное множество вправо, что сохранит все Δ в одинаковой пропорции. Затем можно будет осуществить нормализацию (рис. 10.7).

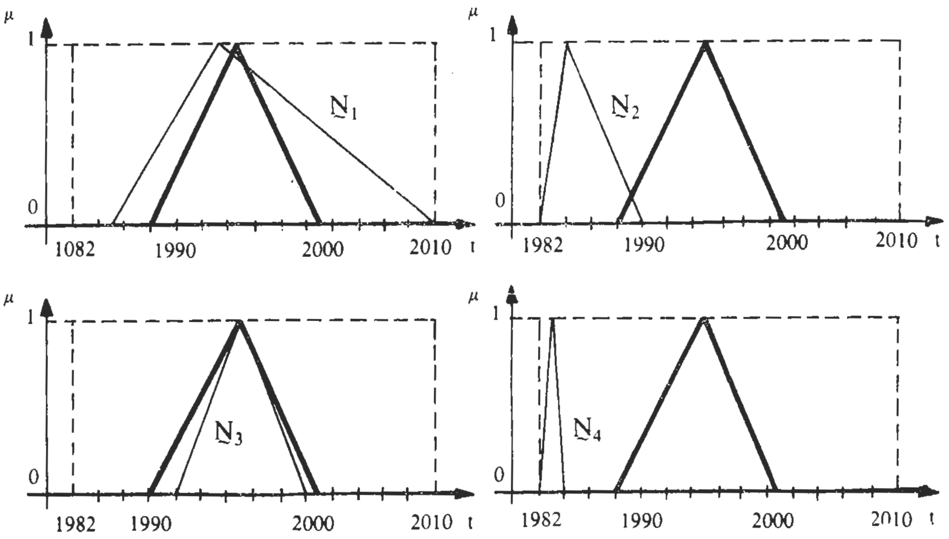


Рис. 10.7 (начало)

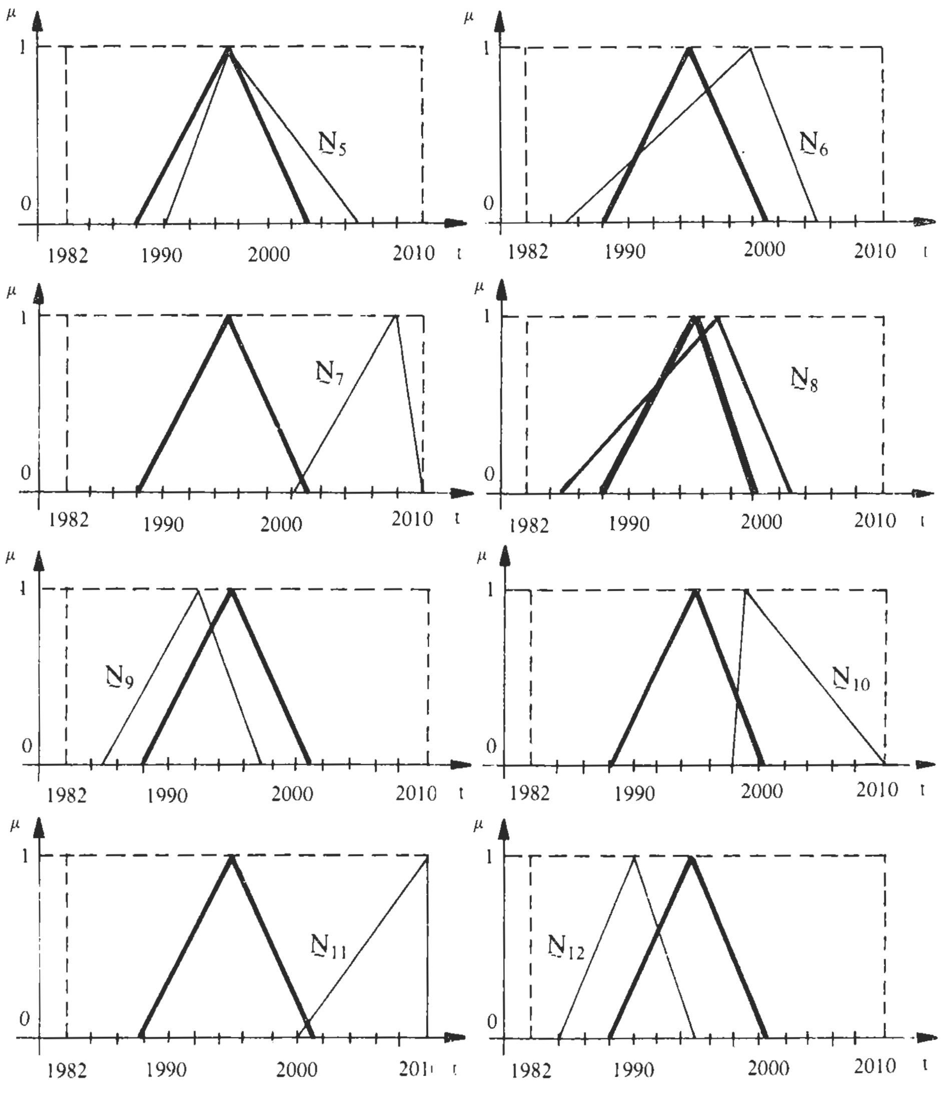


Рис. 10.7 (окончание)

Рассчитаем $\Delta_{л.}$, $\Delta_{п.}$, Δ исходя из геометрических свойств треугольных форм.

Начинаем с $(\underset{\sim}{N}_1, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$.

Для $\Delta_{л.}$ расчет делается непосредственно:

$$\Delta_{л.} = \frac{1}{28}\frac{(1988-1985)+(1995-1993)}{2} = \frac{1}{28}\quad\frac{3+2}{2} = \frac{5}{56} = 0.089$$

Для $\Delta_{п.}$ сначала необходимо узнать точку пересечения (α, t). Имеем

$$\frac{\alpha}{2010-2001} + \frac{1-\alpha}{1995-1993}\text{, т.е. } \frac{\alpha}{9} = \frac{1-\alpha}{2} \text{ и } \alpha = \frac{9}{11}.$$

Тогда

$$\Delta_{п.} = \frac{1}{28}\left(\frac{(2010-2001)\cdot 9/11}{2} + \frac{(1995-1993)\cdot 2/11}{2}\right) = 0.137,$$

$\Delta = (0.089 + 0.137)/2 = 0.113$.

Так же для пары $(\underset{\sim}{N}_2, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$:

$$\Delta_{л.} = \frac{1}{28}\frac{(1988-1982)+(1995-1984)}{2} = \frac{1}{28}\quad\frac{6+11}{2} = \frac{17}{56} = 0.089,$$

$$\Delta_{п.} = \frac{1}{28}\frac{(1995-1984)+(2001-1990)}{2} = \frac{1}{28}\quad\frac{11+11}{2} = \frac{22}{56} = 0.392,$$

$\Delta = (0.303 + 0.392)/2 = 0.347$.

Таким образом последовательно получаем следующую таблицу :

Эксперты	$\Delta_{л.}(\underset{\sim}{N_i}, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$	$\Delta_{п.}(\underset{\sim}{N_i}, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$	$\Delta(\underset{\sim}{N_i}, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$
1	0.089	0.137	0.113
2	0.303	0.392	0.347
3	0.035	0.017	0.026
4	0.321	0.517	0.419
5	0.035	0.071	0.053
6	0.075	0.160	0.117
7	0.446	0.392	0.419
8	0.446	0.071	0.058
9	0.107	0.125	0.116
10	0.250	0.232	0.241
11	0.482	0.482	0.455
12	0.160	0.196	0.178

После того, как эксперт i узнает $\overset{m}{\underset{\sim}{N}}$ с $\Delta_{л.}(\underset{\sim}{N_i}, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$, $\Delta_{п.}(\underset{\sim}{N_i}, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$, он может модифицировать свой прогноз. Процесс повторяется до тех пор, пока это необходимо.

Поскольку речь идет о числах $\Delta_{л.}$, $\Delta_{п.}$, Δ как о расстояниях, можно сформулировать отношение неподобия (которое обычно не является отношением несходства). Очевидно, дополняя его относительно 1, получаем отношение подобия (которое не является отношением сходства).

В следующей таблице приводятся 66 расстояний между прогнозами 12 экспертов (речь идет об отношении неподобия из-за симметричности и нулевой диагонали, что происходит всегда, когда имеем дело с расстояниями) :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.36	.14	.43	.11	.11	.40	.08	.13	.22	.43	.19
2		0	.35	.07	.40	.44	.76	.37	.23	.58	.80	.16
3			0	.42	.04	.13	.41	.08	.12	.23	.44	.18
4				0	.47	.51	.83	.44	.30	.66	.87	.24
5					0	.13	.36	.05	.16	.18	.40	.23
6						0	.32	.07	.21	.14	.35	.27
7							0	.39	.53	.17	.03	.59
8								0	.14	.21	.42	.20
9									0	.35	.57	.06
10										0	.21	.41
11											0	.63
12												0

В связи с использованием описанного метода особый интерес вызывают эксперты, чьи прогнозы резко отличаются друг от друга. В данном случае это прогнозы 2 и 7, 2 и 11, 4 и 7, 4 и 11, 11 и 12. Реализуя подобный анализ, можно пойти еще дальше, разлагая отношение неподобия на максимальное подотношение несходства. Для этого необходимо использовать любой метод, позволяющий выявлять частичные свойства классификации и/или порядка.

Если интересующие нас долгосрочные прогнозы охватывают последовательные и даже параллельные факты, то для получения сумм используется maxmin-свертка (общеизвестно, что если два нечетких числа имеют треугольную форму, их сумма имеет ту же треугольную форму).

На рис. 10.8 предстоящие события $\underset{\sim}{N}_1$, $\underset{\sim}{N}_2$, $\underset{\sim}{N}_3$, $\underset{\sim}{N}_4$ описаны с помощью нечетких чисел треугольной формы, $\underset{\sim}{N}_1$ (+) $\underset{\sim}{N}_2$, $\underset{\sim}{N}_3$ (+) $\underset{\sim}{N}_4$ также являются таковыми, а ($\underset{\sim}{N}_1$ (+) $\underset{\sim}{N}_2$) $\vee$ ($\underset{\sim}{N}_3$ (+) $\underset{\sim}{N}_4$) ими необязательно будут.

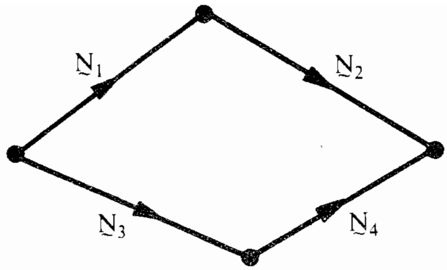


Рис. 10.8

На примере метода FUZZY-Дельфи мы еще раз хотели подчеркнуть ту практическую значимость, которую все больше приобретает теория нечетких множеств в различных применениях.

ВЫВОДЫ

Задачи, которые возникают при управлении предприятием, в силу их природной неопределенности не всегда могут быть решены с помощью методов, пригодных к применению в условиях определенности или предположении о случайном характере переменных с известным законом распределения.

Данная книга затрагивает тему в области управления, которую до сих пор обходили исследователи. Возможно, это было связано с отсутствием достаточной теоретической проработки и гибкости применения подобных исследований. Однако по мере эволюции экономических систем эти задачи становятся все более важными.

Теория нечетких множеств, которая бурно развивается в последние годы, по своим характеристикам соответствует этим потребностям. Оставалось сделать один шаг, а именно использовать возможности этой теории в подходе к рассмотрению реального положения дел на предприятии. Появились отдельные, не связанные между собой работы, описывающие теоретический подход к решению некоторых конкретных задач. Однако оставался целый ряд проблем, которые могли бы составить книгу с четкой структурой. Она задумывалась таким образом, чтобы найти широкого читателя как среди предпринимателей, так и исследователей в области управления предприятиями, среди которых многие не обладают глубокими математическими знаниями. Мы следовали схеме, основанной на трех главных положениях.

Во-первых, описываются элементы, необходимые для понимания используемого аппарата.

Во-вторых, любые объяснения сопровождаются числовыми примерами, иногда для лучшего восприятия объяснение предваряется примером. На протяжении всей книги напоминаются основы вводимых математических понятий, для которых, впрочем, достаточно элементарных математических познаний.

В-третьих, разделы, составляющие данную книгу, могут изучаться отдельно в том случае, если прочитаны два первых, являющихся вводной частью. Так, поскольку для того, чтобы начать свою деятельность, предприятие нуждается в затратах на строительство, рассмотрены вопросы капиталовложений и замены оборудования. Производство представлено материалами (управление товарными запасами), рабочей силой (отбор персонала), сбытом товаров (физическое размещение продукции). Проблемы управления и администрации — анализом баланса, бюджетом и долгосрочным прогнозированием. Каждый из аспектов деятельности предприятия рассмотрен с точки зрения управления таким образом, что сформулированы обобщенные схемы исследований. Для того чтобы теорию нечетких множеств естественным образом применить к экономической деятельности предприятия, вначале предлагалась схема решения типовой задачи при обычных данных. Эта схема затем трансформировалась в модель, пригодную для рассмотрения предположения о неопределенности. Таким образом, был осуществлен постепенный переход от традиционных подходов к новым, предлагаемым нами.

Именно по этой причине мы делали немногочисленные ссылки только на наиболее важные источники, которые не составляют, на наш взгляд, сведений общего характера. В списке литературы приведены работы, опубликованные в 1984—86 гг. и касающиеся аспектов теории нечетких множеств, тем или иным образом связанных с экономикой и управлением предприятиями.

При создании книги преследовалась цель дать подход к исследованию постоянно возникающих проблем с новой точки зрения. Последняя может оказаться наиболее соответствующей тому кругу задач, в котором будут действовать предприятия в ближайшем будущем. Надеемся, что за этой работой последуют другие, позволяющие лучше познать такую важную область деятельности, как управление предприятием.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Настоящая монография известного французского специалиста в области исследования операций профессора Арнольда Кофмана и его испанского коллеги профессора Хайме Хила Алухи опубликована в 1986 г. и является, вероятно, первым систематизированным изложением результатов применения основных понятий и техники теории нечетких множеств к проблемам организационного управления предприятиями. Достаточно обоснованно и с присущим авторам методическим мастерством показано, что многочисленные известные математические модели управления в реальных условиях функционирования предприятий целесообразно формулировать и исследовать в предположении о нечеткости исходных данных.

Материал, изложенный в книге, можно изучать, практически не обращаясь к другим источникам, что ценно как для студентов, изучающих современные математические модели и методы в управлении предприятиями, так и для специалистов-практиков.

Для русского перевода авторы любезно предоставили некоторые дополнения, а также замеченные в оригинале опечатки и неточности. В дополнение к библиографии мы посчитали полезным привести список известных нам опубликованных на русском языке монографий и сборников научных работ по теории и применениям нечетких множеств. Отметим, что количество научных статей, публикуемых по этой теме на русском языке в настоящее время, не очень велико и составляет, по нашим оценкам, всего два-три десятка в год.

В названии книги и в ее тексте мы использовали принятое в русскоязычной литературе словосочетание «теория нечетких множеств», хотя методологически более правильно говорить о нечетких подмножествах, да и термин «нечеткие» в некоторых выражениях неудобен.

Эта монография открывает серию «Новые математические модели и методы в управлении», подготавливаемую кафедрой математического обеспечения АСУ Белорусского государственного университета. Планируется, что в эту серию войдут как переводные монографии и учебные пособия, так и новые работы, написанные специально для серии и посвященные современным моделям и методам организационного управления экономическими системами в условиях функционирования рыночной экономики. При формировании плана мы учитываем рекомендации Европейской ассоциации экономики и управления предприятиями (AEDEM, Santiago de Compostela, Spain), членами которой являемся. С благодарностью примем советы, пожелания и замечания читателей как по возможному составу серии, так и по содержанию каждой из опубликованных книг. Наш адрес: 220050, Республика Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, кафедра МО АСУ.

В. В. Краснопрошин,
Н. А. Лепешинский